

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ ОБЪЕМНЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

С. Н. Сытова

Настоящая работа посвящена развитию численных методов для решения систем дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании объемных лазеров на свободных электронах (ОЛСЭ), а также обсуждению результатов численных экспериментов.

Интерес к лазерам на свободных электронах (ЛСЭ), позволяющим получить генерацию излучения большой мощности и высокой спектральной яркости, возник более пятнадцати лет назад. Частотный диапазон, в котором работают или проектируются ЛСЭ, в настоящий момент распространяется от сантиметрового до рентгеновского. Теоретические исследования показали, что наиболее эффективными схемами являются объемные схемы ЛСЭ с распределенной обратной связью (РОС), позволяющие существенно снизить требования к параметрам электронного пучка. Концепция ОЛСЭ, основанная на параметрической пучковой неустойчивости, была впервые предложена в работе [1] как основа создания рентгеновского лазера, а затем развита в [2–8] для других систем и разных спектральных диапазонов.

Линейный режим работы ОЛСЭ изучен достаточно хорошо [1–8], но он быстро сменяется нелинейной стадией. Математические модели, описывающие нелинейную стадию работы ОЛСЭ, представляют собой системы многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Граничные условия записываются на различных границах системы и сами могут являться дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка, неразрешенными относительно производных по времени для нескольких неизвестных функций. Понятно, что нелинейная стадия работы ОЛСЭ может быть рассмотрена только с использованием разностных методов, поскольку аналитически получить решения таких систем уравнений невозможно.

При решении многомерных уравнений в частных производных удобны экономичные разностные методы, которые для получения приближенного решения с достаточной точностью требуют числа арифметических действий, прямо пропорционального числу узлов пространственной сетки. Все экономичные методы имеют одну общую алгоритмическую идею: процесс отыскания приближенного решения многомерной задачи разбивается на несколько этапов, на каждом из которых решается простая задача. Таким образом, экономичный алгоритм решения сложных задач состоит из цепочки алгоритмов решения простых задач. Начало разработки таких алгоритмов связано с появлением двух основных методов: метода суммарной аппроксимации (или расщепления) и метода переменных направлений (см. [9–12] и библиографию там).

В работе [13] изложен многокомпонентный метод переменных направлений (ММПН), который близок к предложенной первоначальной трактовке метода переменных направлений, но обладает рядом важных преимуществ. Это – абсо-

лютная устойчивость без стабилизирующих поправок для задач любой размерности, отсутствие требования коммутруемости пространственных операторов для выполнения условий устойчивости, эффективность при решении многомерных задач в областях со сложной геометрией. Суть данного метода состоит в том, что каждое из разностных уравнений аппроксимирует исходную дифференциальную задачу, а вычисления по схеме осуществляются последовательно по каждому пространственному направлению. В каждой точке пространства находятся несколько значений (компонент) приближенного решения исходной дифференциальной задачи. Причем доказано, что каждая из этих компонент сходится к исходному решению. Идеи, высказанные в [13], были в дальнейшем развиты в большом количестве работ, где приводятся экономичные алгоритмы данного метода для всех основных типов уравнений.

Системы уравнений, которые необходимо решить при моделировании ОЛСЭ, являются системами дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка гиперболического или смешанного типа. В последнем случае следует говорить о рассматриваемых уравнениях как обобщенных уравнениях переноса. Подчеркнем, что численные методы для такого типа уравнений не разработаны. Поэтому в [14, 15] было проведено исследование возможных разностных схем для решения этих уравнений и полученные результаты в рамках ММПН были применены в моделировании ОЛСЭ в субмиллиметровом диапазоне.

Первыми работами, использующими принципы ММПН для решения гиперболических систем первого порядка, явились работы [16, 17] и [18–20]. В [16] были построены явные и неявные многокомпонентные разностные схемы для линейных симметричных систем. В [17] предложены разностные схемы бегущего счета для решения гиперболических систем с диссипативными граничными условиями. В [18–20] разработаны оригинальные разностные схемы, учитывающие особенности конкретных систем и не налагающие никаких ограничений на вид матриц. В частности, при построении разностных схем для каждой задачи учитывались ее особенности, например, что граничные условия задаются на разных границах системы, существует определенная жесткость в уравнениях, граничные условия сами являются дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных. Там же было проведено моделирование ОЛСЭ для рентгеновского [18, 21] и оптического диапазонов [20–22].

## 1. Физические модели ОЛСЭ

Рассмотрим две принципиально разные схемы ОЛСЭ: объемную и поверхностную. На рис. 1 изображена объемная схема ОЛСЭ в геометрии Брэгга. Такая схема была предложена и изучалась в работах [2, 3, 7, 8]. Электронный пучок со скоростью  $\mathbf{u}$  «падает» под некоторым углом на полубесконечную трехмерную пространственно-периодическую мишень толщиной  $L$ . Параллельно с ним падает плоская электромагнитная волна с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Если эта волна находится в условиях дифракции [23], то в мишени образуется дифрагированная волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}$ , где  $\boldsymbol{\tau}$  – вектор обратной решетки мишени. А при выполнении условия Вавилова – Черенкова  $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} = 0$

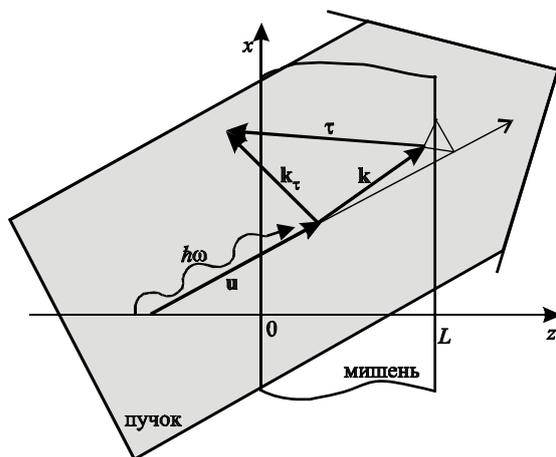


Рис. 1. Объемная схема ОЛСЭ в геометрии Брэгга

частицы пучка будут испускать квазичеренковское излучение. В рентгеновском диапазоне в качестве мишени используются кристаллические пластинки. В этом случае величина пространственного периода определяется периодом кристаллической решетки и испускаемое излучение имеет длину, сравнимую с межатомными расстояниями, т. е. принадлежит рентгеновскому диапазону.

На рис. 2 изображена схема поверхностного ОЛСЭ. Такая схема, где пучок электронов толщиной  $h$  (область II) движется над поверхностью периодической структуры (область III), была впервые предложена в [4] и в линейном приближении рассмотрена в [6]. Преимущество поверхностной схемы заключается в том, что излучение формируется вдоль всей траектории электронного пучка в вакууме без разрушающего воздействия многократного рассеяния на процесс генерации. Причем здесь РОС формируется как в поперечном направлении (вдоль оси  $z$ ), так и продольном (вдоль оси  $x$ ). На рис. 2 изображены векторы проходящих ( $\mathbf{k}^{(+)}$  и  $\mathbf{k}$ ), дифрагированных ( $\mathbf{k}_\tau^{(+)}$  и  $\mathbf{k}_\tau$ ), отраженных ( $\mathbf{k}^{(-)}$  и  $\mathbf{k}^{omp}$ ) и отраженных дифрагированных ( $\mathbf{k}_\tau^{(-)}$  и  $\mathbf{k}_\tau^{omp}$ ) волн в вакууме (области I и IV), пучке и мишени.

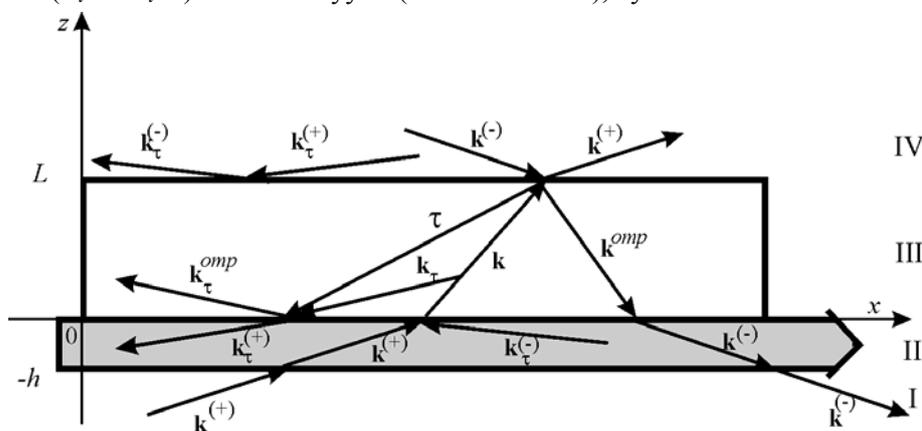


Рис. 2. Схема поверхностного ОЛСЭ

В обеих схемах задача заключается в исследовании усиления электромагнитных волн электронным пучком.

## 2. Математическая модель ОЛСЭ

Во всех геометриях ОЛСЭ уравнения, описывающие их работу, получаются из уравнений Максвелла в приближении медленно меняющихся амплитуд. Будем рассматривать две пространственные переменные:  $z$  и  $x$ .

Запишем эти уравнения в обобщенной форме, не уточняя вид волновых векторов и направления векторов напряженности электромагнитного поля:

1) в вакууме для волны с амплитудой  $E$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  в присутствии электронного пучка:

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_z c^2}{\omega} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega} \frac{\partial E}{\partial x} = F(j), \quad (1)$$

$$F(j) = -\frac{2\pi i}{\omega} \frac{\partial j}{\partial t} - 2\pi j, \quad (2)$$

где  $j$  – плотность тока пучка;

2) в мишени для волны с амплитудой  $E$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , не находящейся в условиях дифракции и не взаимодействующей с электронным пучком:

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_z c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость среды;

3) в мишени в условиях двухволновой дифракции для проходящей волны с амплитудой  $E$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  и дифрагированной волны с амплитудой  $E_\tau$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{k_z c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{(k^2 - \omega^2 / c^2 \varepsilon_0) c^2}{\omega \varepsilon_0} E - \frac{i}{2} \frac{\omega}{\varepsilon_0} \chi_\tau E_\tau = F(j), \\ \frac{\partial E_\tau}{\partial t} + \frac{(k_z + \tau_z) c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E_\tau}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E_\tau}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\omega}{\varepsilon_0} \chi_{-\tau} E + \frac{i}{2} \frac{(k_\tau^2 - \omega^2 / c^2 \varepsilon_0) c^2}{\omega \varepsilon_0} E_\tau = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_0 = 1 + \chi_0$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\chi_0, \chi_{\pm\tau}$  – коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки.  $F(j)$  равно нулю в случае поверхностной схемы и имеет вид (2) при условии прохождения электронного пучка через мишень.

Граничные условия в геометрии Брэгга имеют вид

$$E|_{z=0} = E_0, \quad E_\tau|_{z=L} = E_{\tau 0}, \quad (5)$$

где  $E_0, E_{\tau 0}$  – амплитуды падающих на мишень волн. Чаще считается, что  $E_{\tau 0} = 0$ .

В поверхностной схеме ОЛСЭ граничные условия выводятся из условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей. Они являются дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка для амплитуд  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  вида

$$A_l^- \frac{\partial E_l}{\partial t} + B_l^- \frac{\partial E_l}{\partial x} + C_l^- E_l + D_l E_3 + A_k^+ \frac{\partial E_k}{\partial t} + B_k^+ \frac{\partial E_k}{\partial x} + C_k^+ E_k = f_k(x, t, E_k^{(0)}, j), \quad (6)$$

где  $l = 1, 2$  и  $k = 2, 1$  для двух границ  $z = 0$  и  $z = L$ ,  $t > 0$ ,  $0 < x < X$ ;  $E_k^{(0)}$  – амплитуда падающей на рассматриваемую  $k$ -ю границу волны. Волны с амплитудами  $E_1$  и  $E_3$  находятся в условиях дифракции. Полный вид этих условий для оптического диапазона приведен в [21, 22]. Начальные условия для амплитуд полагаются равными 0 во всех внутренних точках рассматриваемых областей.

Таким образом, поверхностная схема, изображенная на рис. 2, описывается системой (4) с нулевой правой частью, двумя уравнениями типа (3), двумя уравнениями типа (1) с правой частью типа (2) и двумя граничными условиями (6). Математическая модель объемной схемы ОЛСЭ (см. рис.1) состоит из системы (4) с правой частью (2) и граничных условий (5).

Во всех случаях система должна быть дополнена уравнениями, описывающими электронный пучок. Такие уравнения могут быть получены либо в гидродинамическом приближении, либо с помощью функций распределения:

$$f(z, x, \mathbf{v}, t) = f_0 + f^{(0)} + (f^{(1)} \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t)) + f^{(2)} \exp(2i(\mathbf{kr} - \omega t)) + \text{к.с.}). \quad (7)$$

Здесь  $f_0$  – невозмущенная функция распределения пучка.

Система уравнений получается из уравнения непрерывности для функций распределения пучка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m\gamma^3} \left( \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{E} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{E}^* \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{v}} \right) - i(\omega - \mathbf{kv})f^{(1)} &= 0, \\ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m\gamma^3} \left( \mathbf{E} \frac{\partial f^{(1)*}}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{E}^* \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m\gamma^3} \mathbf{E} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{v}} - 2i(\omega - \mathbf{kv})f^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнениях (8) «\*» обозначает комплексное сопряжение. Начальные и граничные условия для  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)}$  и  $f^{(2)}$  полагаются равными 0. Плотность тока пучка для формулы (2) определяется стандартным образом.

### 3. Разностные методы

Уравнения (1), (3), (4), (6), (8) есть уравнения первого порядка с комплексными неизвестными функциями  $E$  и  $f$  и действительными или комплексными коэффициентами. Если, например, в уравнении (1) компоненты волнового вектора  $k_z$  и  $k_x$  являются действительными, перед нами – чисто гиперболическое уравнение, или уравнение переноса. Но при  $k_z = k_z' + ik_z''$  мы имеем дело с так

называемыми поверхностными волнами. Именно этот случай наблюдается в вакууме в поверхностной схеме ОЛСЭ (см. рис. 2) для волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}^{(+)}$  и  $\mathbf{k}^{(-)}$ . Видно, что в этом случае существуют две характеристики: действительная по  $x$  и комплексная по  $z$ . Уравнения такого типа являются *обобщенными уравнениями переноса*. Изучим сначала возможные разностные методы для такого типа уравнений.

Рассмотрим следующее модельное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial z} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Коэффициент  $a$  является комплексным,  $b$  – действительным. Поставим для него граничное и начальное условия:

$$\begin{aligned} u(0, x, t) &= u_0, \quad t > 0, \\ u(z, x, 0) &= 0, \quad 0 \leq z \leq L. \end{aligned} \quad (10)$$

При рассмотрении корректности задачи (9) – (10), даже если коэффициент  $a$  является действительным, становится очевидным, что ее решение является разрывным при  $t = 0$  и  $z = 0$ . То есть в начальный момент времени на границу  $z = 0$  приходит ударная волна с амплитудой  $u_0$ . В этом случае следует говорить об обобщенном решении модельной задачи. Более того, хорошо известно [24], что начальная задача для системы Коши – Римана является некорректно поставленной. Таким образом, и в нашем случае надо ожидать, что задача будет некорректной. Но поскольку нас интересует только нулевая гармоника решения (9), которая после установления равна просто  $u_0$ , и мы знаем о существовании решения, то можно попытаться использовать численные методы для решения модельной и полной нелинейной задач.

В [14–15] был проведен анализ возможных разностных схем для задачи (9) – (10). Для простоты рассмотрим сначала уравнение с чисто мнимым коэффициентом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

где  $a = ia''$ ,  $a'' > 0$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

В области  $\Omega = \{0 \leq z \leq L, 0 \leq t \leq T\}$  введем равномерную сетку:

$$G = \{(z = z_k = kh, k = 0, \dots, N_z, N_z = [L_z / h]), t = t_j = j\tau, j = 0, \dots, N_t, N_t = [T / \tau]\}. \quad (11)$$

Всюду ниже, где это удобно, будем пользоваться обозначениями [12]:

$$y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \quad \hat{y} = y^{j+1}.$$

Видно, что центрированные схемы применяться не могут, поскольку имеется одно граничное условие. Если мы хотим, чтобы амплитуда  $u_0$  переносилась слева направо, нужно использовать соответствующую разностную производную. Рассмотрев простейшие разностные схемы: явную и неявную схемы первого порядка, схему с весами, схему бегущего счета и схему второго порядка по време-

ни и пространству и исследовав их спектральную устойчивость, мы получили следующие результаты. Явная схема, схема бегущего счета и схема второго порядка являются абсолютно неустойчивыми. Для неявной схемы первого порядка

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a \frac{y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}}{h} = 0 \quad (12)$$

условие счетной устойчивости выглядит следующим образом:  $\frac{\tau |a|}{h} \geq 2$ .

Схема с весами

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + \sigma a \frac{y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}}{h} + (1 - \sigma) a \frac{y_k^j - y_{k-1}^j}{h} = 0$$

устойчива при условии

$$\frac{\tau |a|}{h} \geq \frac{2}{2\sigma - 1} \text{ и } 0,5 < \sigma \leq 1.$$

Если рассмотрим комплексный коэффициент  $a = a' + ia''$ ,  $a' > 0$ , то для схемы с весами получим условие устойчивости :

$$(2\sigma - 1) \frac{\tau |a|^2}{h} + a' \geq 2a'' \quad (13)$$

В [15] приведено аналогичное условие счетной устойчивости для неявной схемы. Справедливость этой оценки была подтверждена численно. Возвращаясь к уравнению (9), поскольку мы нашли приемлемые разностные схемы для части с комплексной характеристикой, можно попытаться использовать для его решения в целом алгоритмы ММПН. А так как в случае математических моделей ОЛСЭ вид уравнений не меняется, мы можем записывать алгоритмы как для гиперболических, так и для обобщенных уравнений переноса единообразно. Для простоты коэффициенты в уравнениях расписывать не будем.

Введем равномерные сетки по пространству, времени и скоростям (11). В области  $\Omega_v = \{u - \Delta v \leq v \leq u + \Delta v\}$ , где  $u$  – невозмущенная скорость частиц пучка,  $\Delta v$  – разброс по скоростям, введем разностную сетку по  $v$ :

$$\omega_v = \{v_m = u - \Delta v + mh_v, m = 0, \dots, N_v, N_v = [2\Delta v / h_v]\};$$

в области  $\Omega_x = \{0 \leq x \leq L_x\}$  – сетку

$$\omega_x = \{x_k = nh_x, n = 0, \dots, N_x, N_x = [L_x / h_x]\}.$$

Тогда уравнение (1) аппроксимируем следующими двумя уравнениями :

$$\begin{aligned} E_t^1 + A_1 \hat{E}_z^1 + A_2 E_x^2 &= F(\hat{j}), \\ E_t^2 + A_1 \hat{E}_z^1 + A_2 \hat{E}_x^2 &= F(\hat{j}). \end{aligned} \quad (14)$$

Система (4) аппроксимируется системой четырех разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
E_t^1 + A_{11}\hat{E}_z^1 + A_{12}E_x^2 + Q_{11}\hat{E}^1 + Q_{12}\hat{E}_\tau^1 &= F(\hat{j}), \\
E_\sigma^1 + A_{21}\hat{E}_\tau^1 + A_{22}E_\alpha^2 + Q_{21}\hat{E}^1 + Q_{22}\hat{E}_\tau^1 &= 0, \\
E_t^2 + A_{11}\hat{E}_z^1 + A_{12}\hat{E}_x^2 + Q_{11}\hat{E}^1 + Q_{12}\hat{E}_\tau^1 &= F(\hat{j}), \\
E_\sigma^2 + A_{21}\hat{E}_\tau^1 + A_{22}\hat{E}_\alpha^2 + Q_{21}\hat{E}^1 + Q_{22}\hat{E}_\tau^1 &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

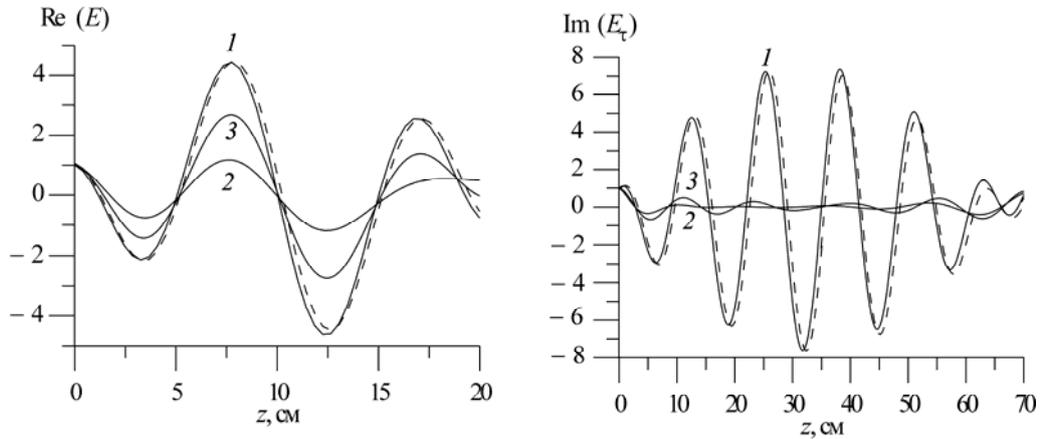
Либо

$$\begin{aligned}
E_t^1 + A_{11}\hat{E}_z^1 + A_{12}E_x^2 + Q_{11}\hat{E}^1 + Q_{12}\hat{E}_\tau^1 &= F(\hat{j}), \\
E_\sigma^1 + A_{21}\hat{E}_\tau^1 + A_{22}E_\alpha^2 + Q_{21}\hat{E}^1 + Q_{22}\hat{E}_\tau^1 &= 0, \\
E_t^2 + A_{11}\hat{E}_z^1 + A_{12}\hat{E}_x^2 + Q_{11}\hat{E}^1 + Q_{12}\hat{E}_\tau^1 &= F(\hat{j}), \\
E_\sigma^2 + A_{21}\hat{E}_\tau^1 + A_{22}\hat{E}_\alpha^2 + Q_{21}\hat{E}^1 + Q_{22}\hat{E}_\tau^1 &= 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

где  $\bar{E} = 0,5(E_k + E_{k-1})$ .

Поскольку чисто неявные схемы для гиперболических уравнений обладают большой аппроксимационной вязкостью, пропорциональной величине расчетной сетки, то оказалось, что, если решение достаточно быстро осциллирует, более эффективна схема (16). Наиболее характерные графики приведены на рис. 3. Здесь изображены точное аналитическое решение задачи дифракции (кривые 1) для геометрии рис. 1 в миллиметровом диапазоне и численное решение по схемам (16) (пунктирные кривые,  $N_z = 50$  (а) и  $N_z = 200$  (б)). Кривые 2 и 3 ( $N_z = 200$  и  $N_z = 800$  соответственно) получены с помощью схем (15). При небольшом увеличении размерности сетки получаются идеальные результаты для схем (16) и не получаются даже при очень значительном увеличении для схем (15). Подобные результаты для рентгеновской области приводились в [27].

Рассмотрим теперь, как аппроксимируются граничные условия. Условия (5) аппроксимируются точно.



а

б

Рис. 3. Сравнение эффективности работы схем (15) и (16):

а – зависимость действительной части амплитуды проходящей волны в мишени толщиной 20 см; б – зависимость мнимой части амплитуды дифрагированной волны в мишени толщиной 70 см

Пусть в условиях (6) на границу  $l = 1$  приходит волна с амплитудой  $E_2$ , а выходит – с амплитудой  $E_1$ , а для границы  $l = 2$  – все наоборот. Тогда разностный алгоритм для (6) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} A_l^- E_{lt}^1 + B_l^- E_{lx}^2 + C_l^- \hat{E}_l^1 + D_l \hat{E}_3^1 + A_k^+ E_{kt}^1 + B_k^+ E_{kx}^2 + C_k^+ \hat{E}_k^1 &= f(\hat{E}_k^{(0)}, \hat{j}), l=1, 2, k=2, 1; \\ A_l^- E_{lt}^2 + B_l^- \hat{E}_{lx}^2 + C_l^- \hat{E}_l^1 + D_l \hat{E}_3^1 + A_k^+ E_{kt}^1 + B_k^+ E_{kx}^2 + C_k^+ \hat{E}_k^1 &= f(\hat{E}_k^{(0)}, \hat{j}), l=1, k=2; \\ A_l^- E_{lt}^1 + B_l^- E_{lx}^2 + C_l^- \hat{E}_l^1 + D_l \hat{E}_3^1 + A_k^+ E_{kt}^2 + B_k^+ \hat{E}_{kx}^2 + C_k^+ \hat{E}_k^1 &= f(\hat{E}_k^{(0)}, \hat{j}), l=2, k=1. \end{aligned} \quad (17)$$

В схемах (14) – (17)  $E^1, E^2$  – пара приближенных значений (компонент) искомой функции  $E$ . В качестве решения в каждой точке области может быть взято одно из значений (первое или второе) или их полусумма. Направления производных по  $z$  и  $x$  (левая или правая) выбираются в зависимости от направления распространения волн. Благодаря использованию многокомпонентности удалось получить разностный аналог уравнений, который решается последовательно, без итераций. Причем процесс вычисления компоненты  $E^2$  по  $x$  осуществляется в соответствии с направлениями распространения волн и является полностью независимым для каждой отдельной волны, что позволяет двигаться по оси  $x$  параллельно. Смысл построения схем для граничных условий типа (17) состоит в том, что в каждом разностном уравнении сверху вычисляются те компоненты второго решения, которые соответствуют «выходящим» с данной границы волнам. «Приходящим» на эту границу волнам соответствуют первые решения, вычисленные ранее.

Если переписать систему (8) в обобщенном виде, рассмотрев только одну компоненту скорости  $v = v_x$ :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} + R \frac{\partial F}{\partial v} + PF = D,$$

где  $F = (f^{(1)}, f^{(0)}, f^{(2)})^T$ , то в рамках ММПН она аппроксимируется так:

$$\begin{cases} F_t^1 + v_m \hat{F}_x^1 + P\hat{F}^1 + RF_v^2 = \hat{D}, \\ \frac{\hat{F}^2 - \tilde{F}^2}{\tau} + v_m \hat{F}_x^1 + P\hat{F}^1 + RF_v^2 = \hat{D}, \end{cases} \quad (18)$$

где  $F_v = \frac{F_{m+1} - F_{m-1}}{2h_v}$ ,  $\tilde{F} = 0,5(F_{k+1} - F_{k-1})$ .  $F^1, F^2$  – разностные компоненты  $F$ . В качестве решения берется полусумма  $F^1$  и  $F^2$ . Для вычисления второй компонен-

ты использована схема Лакса [26]. В данном случае условие устойчивости будет определяться условием устойчивости для схемы Лакса:  $\frac{\tau |E|}{h_v} < 1$ .

Все приведенные разностные схемы являются экономичными схемами полной аппроксимации. На достаточно гладких решениях они имеют первый порядок аппроксимации по времени и пространству. Можно также использовать

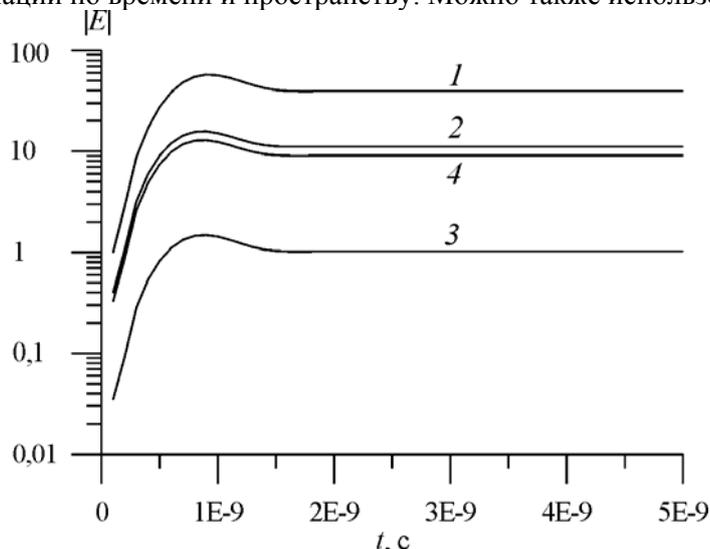


Рис. 4. Усиление электромагнитного поля как функция времени

разностные схемы второго порядка аппроксимации. Такого рода схемы для гиперболических уравнений были предложены в [27]. Однако они не дают существенного улучшения качества разностного решения и привносят в него паразитические осцилляции.

Если математическая модель ОЛСЭ представляет собой систему гиперболических уравнений, то наши схемы являются безусловно устойчивыми. В случае обобщенных уравнений переноса имеют место условия устойчивости [15] и (13). В [19, 21, 27] было проведено доказательство устойчивости по начальным данным и правой части, а также сходимости решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной для гиперболических систем вида (4). Пользуясь этой методикой и учитывая условие (13), можно доказать устойчивость и сходимость в случае обобщенных уравнений переноса.

#### 4. Результаты численного моделирования ОЛСЭ

На основе предложенных разностных методов был разработан комплекс программ для численного моделирования нелинейного режима работы ОЛСЭ в рентгеновском, оптическом, миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах.

Рассмотрим некоторые результаты, полученные для поверхностного оптического ОЛСЭ (см. схему рис. 2). Расчеты проводились для мишени толщиной

$L_z = 0,1$  см, длиной  $L_x = 10$  см, диэлектрическая проницаемость которой  $\varepsilon_0 = 2,4334$ . Для излучения в оптическом диапазоне периодическая структура мишени с периодом  $d \approx 10^{-5}$  см может быть создана, например, с помощью лазера. Предполагалось, что диэлектрическая проницаемость мишени, созданной таким образом, будет следующей:  $\chi_{\pm} = 0,01$ . Частота излучения принималась равной  $\omega = 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Фактор асимметрии дифракции  $\beta = 0,85$ . Точность выполнения условия Вавилова – Черенкова (точность черенковского синхронизма)  $\varepsilon = |\omega - k_x u| / \omega$  принимала значения порядка  $10^{-5}$ . Параметры электронного пучка были выбраны следующие:  $\omega_L^2 = 1,6 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-2}$ ,  $\gamma = 10$ , поперечный размер  $h = 0,1$  см. Пучок считался холодным.

На рис. 4 представлен график зависимости электромагнитного поля от времени. Кривые 1 и 2 описывают амплитуду проходящей волны на границах  $z = 0$  и  $z = L$ . Кривые 3 и 4 соответствуют дифрагированной волне при  $z = L$  и  $z = 0$  соответственно. Очень важно, что в рассмотренной схеме ОЛСЭ процесс усиления сильно зависит не только от условия синхронизма, но и от условия Брэгга для излученного фотона. Условие Брэгга определяет эффективность РОС.

Рис. 5 демонстрирует попытку оптимизации процесса усиления черенковской волны по отношению к условию синхронизма  $\varepsilon$  и условию Брэгга. Мы рассматривали изменение  $\varepsilon$  между  $-2 \cdot 10^{-5}$  и  $2 \cdot 10^{-5}$  и отклонение от точного выполнения условия Вавилова – Черенкова

$$\alpha_B = \frac{2\mathbf{k}_{\perp} \boldsymbol{\tau}_{\perp} + \boldsymbol{\tau}^2}{\omega^2} c^2 = s \frac{\chi_{\tau}}{\sqrt{\beta}} \quad (19)$$

от  $-7 \cdot |\chi_{\tau}| / \beta^{1/2}$  до  $7 \cdot |\chi_{\tau}| / \beta^{1/2}$ . Из рис. 5 видно, что существует оптимальное соотношение между этими параметрами, когда процесс усиления развивается наиболее эффективно.

Таким образом, моделирование показало, что для видимой области спектра в выбранной геометрии дифракции и параметров пучка электронов насыщение черенковской волны достигается уже на длине мишени, равной 10 см. Это значит,

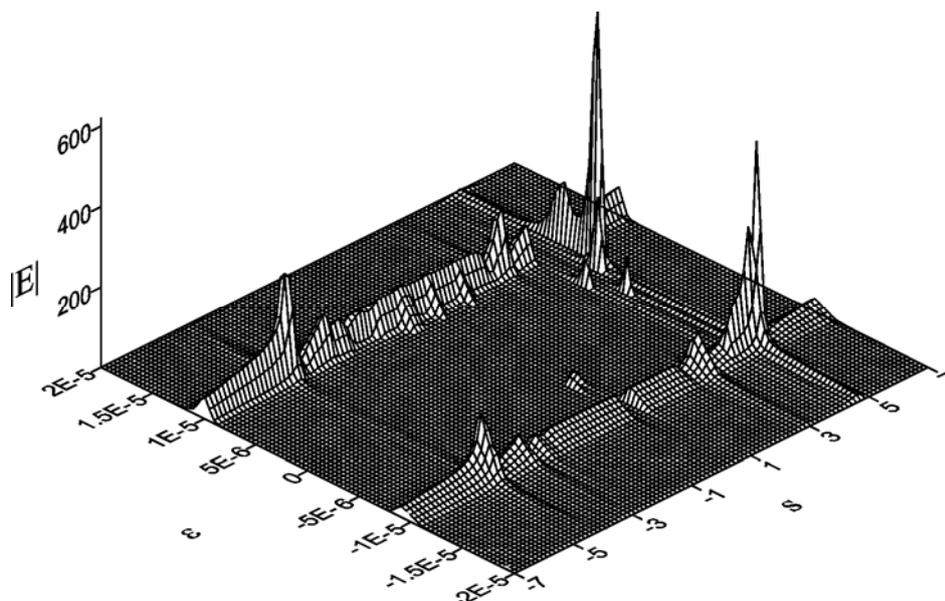


Рис. 5. Зависимость процесса усиления черенковской волны от отклонения от  $\varepsilon$  и  $\theta$  что рассматриваемая схема ОЛСЭ характеризуется малой рабочей областью генерации и генерируемое излучение имеет узкую спектральную ширину  $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-5}$ . Кроме того, имеются оптимальные значения отклонения от черенковского синхронизма и условий дифракции, при которых усиление электромагнитной волны развивается наиболее эффективно, и зависимость от этих параметров очень сильная.

Разработанные вычислительные алгоритмы могут эффективно применяться при моделировании нелинейных режимов работы ОЛСЭ, что было подтверждено численными экспериментами. Численные результаты согласуются с аналитическими оценками, полученными в линейном приближении. На основании проведенного анализа можно сделать вывод о возможности численно моделировать работу ЛСЭ в будущих экспериментах.

Автор благодарит за всемерную поддержку и постоянное внимание В. Г. Барышевского, К. Г. Батракова, И. Я. Дубовскую, а также В. Н. Абрашина за большую помощь в работе.

### Литература

1. *Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D.* // Phys. Lett. 1984. Vol. A102. P. 141.
2. *Барышевский В. Г.* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 6. С. 1363–1366.
3. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // J. Phys. D. 1991. Vol. 24. P. 1250–1257.
4. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // Nucl. Instr. Meth. 1994. Vol. A341. P. 274–276.
5. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // Nucl. Instr. Meth. 1995. Vol. A358. P. 493–496.

6. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya., Sytova S. N.* // Nucl. Instr. Meth. 1995. Vol. A358. P. 508–511.
7. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* Free Electron Lasers 1996. Elsevier Science, 1997.
8. *Baryshevsky V. G.* // LANL e-print archive physics/9806039.
9. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
10. *Марчук Г. И.* Методы расщепления. М., 1988.
11. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М., 1989.
12. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1989.
13. *Абрашин В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 26, № 2. С. 314–323.
14. *Сытова С. Н.* // Proc. of the 3rd Intern. Conf. FDS2000. Vilnius, 2000. P. 237–244.
15. *Сытова С. Н.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, №7. С. 976–981.
16. *Абрашин В. Н., Минченков Ю. В.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1990. № 3. С. 3–9.
17. *Волков В. М., Жадаева Н. Г.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1187–1193.
18. *Абрашин В. Н., Грубич А. О., Сытова С. Н.* // Мат. моделирование. 1991. Т. 3, № 8. С. 21–29.
19. *Сытова С. Н.* // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1993, № 2. С. 44–50.
20. *Сытова С. Н.* // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, №7. С. 986–989.
21. *Сытова С. Н.* Математическое моделирование нелинейных процессов излучения электромагнитных волн в объемных лазерах на свободных электронах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1997.
22. *Dubovskaya I. Ya., Baryshevsky V. G., Batrakov K.G., Sytova S. N.* // The 21th Intern. Free Electron Laser Conf. (FEL99). [http://www.desy.de/fel99/contributions/T05/ID\\_Mo-P-16.html](http://www.desy.de/fel99/contributions/T05/ID_Mo-P-16.html)
23. *Пинскер З. Г.* Рентгеновская кристаллооптика. М., 1982.
24. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М., 1979.
25. *Сытова С. Н.* // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1998. № 2. С. 82–85.
26. *Lax P. D.* // Communications Pure Appl. Math. 1954. Vol. 7. P. 159–193.
27. *Sytova S.* // LANL e-print archive physics/9901033.

## NUMERICAL METHODS IN MODELING OF VOLUME FREE ELECTRON LASERS

S. N. Sytova

This article is devoted to development of numerical methods for solving of differential equations originated in modeling of volume free electron lasers (VFEL).

The idea of VFEL based on parametric beam instability was proposed in [1] as a base of X-ray laser for X-ray region and developed then in [2–8] for other spectral regions.

Linear regime of VFEL was investigated in [1–8] but it changes rapidly into nonlinear regime. Mathematical model of such regime is a system of multidimensional first-order nonlinear partial differential equations (PDEs). Boundary conditions can be written on different boundaries and are PDEs too. Therefore we use numerical methods for solving such type of differential problem. Equations to be solved are hyperbolic or mixed. Let's call them as *generalized transfer equations*.

In order to solve suggested differential system it is conventional to construct efficient difference schemes. Such schemes can be obtained using different component-wise splitting methods, locally one-dimensional method, proper alternating direction methods and its various versions. All they are well extended and developed. They have one common advantage be-

cause they allow to put solving of complicated problems to solving of the system of simpler ones.

We use the multicomponent modification of the alternating direction method (MMADM) which was devised in [13]. This method is efficient and unconditionally stable for multidimensional problems in domains with complicated geometry. It is effective also when operating with complex arithmetic. In addition it allows to accomplish parallel processing. MMADM was developed for all principal types of problems of mathematical physics (stationary and non-stationary). The case of hyperbolic equations was studied in [16–21].

We consider two different versions of VFEL (see Fig. 1 and Fig. 2). The first one represents a volume scheme when an electron beam passes through space-periodic target. In the second one the surface scheme of VFEL when electrons pass over the surface of the target is realized. In all cases the system of PDEs for modeling of VFEL is derived from Maxwell's equations in the approximation of slowly changing amplitudes (see Eqs.(1)–(6)).

We present analysis of possible difference schemes for numerical solution of generalized transfer equations (9). Good difference algorithm was the implicit scheme of the first-order approximation (12) with proper left or right difference derivatives. In this case we have the stability condition (13).

So, for the full problem of modeling of VFEL difference schemes of MMADM are proposed (see (14) – (18)). They are suitable both for hyperbolic and generalized systems.  $E^1$ ,  $E^2$  and  $F^1$ ,  $F^2$  are difference components of  $E$  and  $F$  respectively. One can choose any of these two components or its half-sum as a solution. When PDE solution is oscillating very rapidly one can use schemes (16) rather than (15) because of large approximating viscosity in first-order implicit schemes. Calculating second components of numerical solution one should move along  $x$  accordingly to the waves spread directions. We can use parallel processing in this case.

Thanks to using ideas of MMADM we obtained difference schemes which were solved without iterations. It should be emphasized that no conditions were imposed on the form of system matrixes. Given difference schemes are efficient and completely consistent. They are of the first order approximation with respect to time and space on sufficiently smooth solutions. For them one can prove the stability relative to initial data and right-hand sides and also the convergence of difference problem solution to the solution of differential problem. This follows from the properties of MMADM and were proved in [19, 21, 27].

By virtue of numerical experiments carried out one may conclude about efficiency of difference algorithms presented and about possibility of application of obtained numerical results for future planned experiments.