

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

А. А. Дойников

Физические явления, о которых пойдет речь в этой статье, на протяжении ряда лет являлись основным предметом научных исследований автора. Список наиболее значимых работ, опубликованных автором по данной тематике, приводится в конце статьи. Невозможно, да и нет никакого смысла, воспроизводить здесь, даже частично, все вычисления, которые содержатся в упомянутых публикациях. Сознвая это, автор поставил своей целью, по возможности вообще избегая формул, просто рассказать о том, почему это интересно, что было сделано другими, что сделал он и чем сейчас занимаются люди, работающие в этой области. Другими словами, настоящая статья представляет собой не претендующий на всесторонний охват обзор работ по данному направлению с уклоном в научно-популярную сторону.

Физическая акустика – это область физики, изучающая взаимодействие акустических волн с веществом на макро- и микроскопических уровнях. Такое определение дается в одном из учебных пособий по физической акустике [1], и оно показывает, что у настоящей статьи есть основания для включения в данный сборник. Дисперсные частицы, о которых говорится в заголовке, – это инородные включения (пузырьки, твердые частицы, капли и т. д.), находящиеся в текучей среде (жидкости или газе), через которую распространяется акустическая волна. Под действием этой волны дисперсные частицы приходят в движение. Их центры масс осциллируют, у пузырьков и капель при этом меняются объем и форма. Но дело этим не ограничивается, поскольку уравнения, описывающие движение текучей среды, существенно нелинейны, в результате чего возникает постепенное смещение (дрейф) дисперсных частиц как по отношению к источнику звука, так и по отношению друг к другу. Частицы группируются в пучностях (или узлах) стоячей волны, слипаются, сливаются, образуют гроздь и т. д. В сильном поле, например, в результате локальных разрывов несущей жидкости образуются кавитационные пузырьки размером в несколько микрон, которые движутся к ближайшей пучности звукового давления и образуют при этом сложные ветвистые структуры, очень похожие на фотографии электрических разрядов и называемые поэтому кавитационными (или акустическими) разрядами. Общепринятый подход, применяемый при исследовании подобных явлений, состоит в получении уравнений «медленного» движения дисперсных частиц, т. е. уравнений, усредненных по периоду внешнего поля. В основе такого подхода лежит вычисление так называемых акустических радиационных сил (АРС), которые представляют собой усредненные по времени гидродинамические силы, описывающие взаимодействие между падающим звуковым полем и отдельной дисперсной частицей (первичные АРС), а также взаимодействие частиц друг с другом посредством перерассеянных полей (вторичные АРС). Эти силы являются аналогом электромагнитных радиационных сил (ЭМРС), наиболее известным проявлением которых служит световое давление. Известный русский физик

П. Н. Лебедев, интересовавшийся этой проблемой, пришел к выводу, что природа данного явления универсальна [2]. Однако между АРС и ЭМРС имеется существенное количественное различие: в общем случае величина АРС намного превосходит величину ЭМРС, в результате чего АРС играют в акустике несравненно более важную роль, чем ЭМРС в электродинамике. По этой же причине АРС находят гораздо более широкое практическое применение. Полезные свойства этих сил используются в ряде физических экспериментальных методик, а также во многих химических и биомедицинских технологиях, основанных на применении ультразвука. Приведем некоторые классические примеры. Для первичных АРС таким примером может служить акустическая левитация. Этим термином обозначается устойчивая фиксация некоего объекта в заданной точке пространства посредством АРС, возникающих в стоячей акустической волне. Обычно таким объектом является капля жидкости или расплава, газовый пузырек или твердая частица, которые в данном случае представляют собой образец материала, предназначенного для исследования или обработки. Эта технология обладает рядом важных достоинств. Во-первых, она позволяет избежать непосредственного контакта с «подвешенным» объектом и тем самым уберечь его от загрязнения. Во-вторых, с помощью акустической левитации можно фиксировать объекты, размеры которых лежат в весьма широком диапазоне – от сантиметров до микрон. И в-третьих, низкая энергетичность звуковых волн позволяет работать с объектами повышенной опасности, такими как образцы агрессивных жидкостей и газов. Особенно перспективным является применение данной технологии в невесомости, где исключается негативное влияние силы тяжести. По этой причине в США на протяжении многих лет исследования в области акустической левитации финансируются NASA, и приборы, созданные на этом принципе, входят в состав научной аппаратуры американских космических челноков. В литературе имеются описания ряда интересных экспериментов, выполненных с помощью таких приборов в космической лаборатории NASA во время орбитальных полетов. Классическим примером, иллюстрирующим «полезность» вторичных АРС, может служить так называемая ультразвуковая дегазация. Суть этого процесса состоит в тщательном и быстром удалении газа из жидкости или расплава в целях очистки последних или придания им определенных свойств. Вторичные АРС позволяют «собирать» мелкие пузырьки в крупные, способность к всплытию у которых гораздо выше. Тем самым во много раз повышается как скорость, так и степень очистки. Сфера использования АРС постоянно расширяется. Недавно японские ученые предложили еще одно весьма любопытное применение для АРС. Они разработали и опробовали метод, который использует АРС, действующие на биологические частицы в звуковом поле, для построения сложных биологических структур типа нуклеиновых кислот и протеинов.

Основы теории АРС были заложены во второй половине XIX в. Одним из «отцов-основателей» был знаменитый лорд Рэлей [3], но более часто (и заслуженно) цитируют работы двух голландских физиков – отца и сына Бьеркнесов, для которых АРС были главным предметом исследований на протяжении всей их научной деятельности [4]. Бьеркнесы изучали разные проявления этого эффекта, но наибольший интерес у них вызывало взаимодействие двух пульси-

рующих пузырьков. Бьеркнесы обнаружили, что пузырьки, пульсирующие в фазе, притягивают друг друга, а в противофазе – отталкивают. Они получили аналитическое выражение для силы взаимодействия пузырьков, которое, если предположить, что пульсации пузырьков вызываются звуковой волной, имеет следующий вид:

$$F_B = \frac{C_B}{L^2 (1 - \omega_1^2 / \omega^2)(1 - \omega_2^2 / \omega^2)}. \quad (1)$$

Здесь  $C_B$  – положительный коэффициент, зависящий от параметров системы;  $L$  – расстояние между центрами пузырьков;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – резонансные частоты пузырьков;  $\omega$  – частота падающей волны. В честь Бьеркнесов эту силу принято называть силой Бьеркнеса. Любопытно отметить, что Бьеркнесы, опираясь на тот факт, что  $F_B \sim L^{-2}$ , пытались использовать этот гидродинамический эффект для объяснения явлений электромагнетизма – они даже ввели термины «гидро-электричество» и «гидромагнетизм». Впоследствии другие физики пытались также использовать формулу Бьеркнесов для «гидродинамического» объяснения гравитации [5].

Первая серьезная теоретическая работа, посвященная первичным АРС, появилась значительно позже, в 1934 г., и принадлежала канадскому физiku Кингу [6]. Таким образом, теория АРС начала свое развитие с изучения вторичных, а не первичных сил. Однако в нашей статье для удобства мы исправим эту историческую «несправедливость» и вернемся вновь к вторичным силам только после того, как расскажем все о первичных. Итак, Кинг был первым, кто вычислил первичные АРС, действующие на жесткую сферу в идеальной (т. е. невязкой и нетеплопроводной) текучей среде, через которую распространяется произвольная осесимметричная звуковая волна. Общие выражения, полученные Кингом, справедливы при любых соотношениях между радиусом сферы и длиной звуковой волны. На практике, однако, чаще всего приходится иметь дело с частицами, размеры которых много меньше длины звуковой волны. Учитывая это, Кинг применительно к плоской бегущей и плоской стоячей волнам вывел соответствующие предельные выражения, которые и имеют в виду, когда говорят о формулах Кинга:

$$F_K^{(\text{бег})} = C_K^{(\text{бег})} (k R_0)^6, \quad (2)$$

$$F_K^{(\text{ст})} = C_K^{(\text{ст})} (k R_0)^3 \sin(2kd). \quad (3)$$

Здесь  $k$  – волновое число в окружающей среде,  $R_0$  – радиус сферы, причем по предположению  $k R_0 \ll 1$ , а  $d$  – расстояние между центром сферы и ближайшей плоскостью узлов скорости стоячей волны. Коэффициент  $C_K^{(\text{бег})}$  всегда положителен, и это означает, что в бегущей волне частицы должны двигаться прочь от источника звука. В стоячей волне дело обстоит сложнее, поскольку знак коэффициента  $C_K^{(\text{ст})}$  зависит от соотношения между плотностью сферы  $\rho$  и плотно-

стью окружающей среды  $\rho_0$ . В результате, согласно теории Кинга, «тяжелые» частицы, у которых  $\rho > 0,4\rho_0$ , должны собираться в пучностях скорости, а «легкие» частицы, у которых  $\rho < 0,4\rho_0$ , – в узлах скорости. Формулы Кинга позволили объяснить ряд явлений. В частности, эксперименты известного немецкого физика Кундта (его считают основателем немецкой научной школы физиков-экспериментаторов), который еще в 1866 г. наблюдал формирование пылевых сгустков в заполненной воздухом цилиндрической трубке, в которой устанавливалась стоячая звуковая волна. Стало также более понятно, почему звуковые сирены значительно ускоряют осаждение пыли и аэрозольных частиц. Этот метод уже на протяжении многих лет применялся в различных промышленных производствах, но чисто эмпирически. Справедливости ради следует заметить, что впервые теоретическое объяснение подобных явлений было дано Рэлеем еще в 1878 г. [3], но только в работе Кинга эти вычисления получили удовлетворительную строгость и общность.

Несмотря на успехи теории Кинга, было очевидно, что используемая в ней модель жесткой сферы вряд ли будет адекватной, когда сжимаемость частицы сравнима или много больше сжимаемости несущей среды, как, например, в случае жидкой капли, помещенной в иную, несмешивающуюся, жидкость, или в случае газового пузырька. Это побудило двух японских физиков по фамилии Иосиока и Кавасима провести соответствующие теоретические и экспериментальные исследования, результаты которых были опубликованы в 1955 г. [7]. Обобщая подход Кинга, они применили уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости не только к окружающей среде, но и к среде внутри сферы. В результате были получены выражения, пригодные не только для твердых частиц, но также для капель и газовых пузырьков. Подобно Кингу, японцы вначале вывели общее выражение, справедливое для сферы произвольной сжимаемости и размера, а затем рассмотрели отдельно случай капли и случай газового пузырька в длинноволновом пределе. В качестве примера, преследуя цели, которые станут ясными ниже, приведем выражения, полученные Иосиокой и Кавасимой для газового пузырька в поле плоской бегущей и плоской стоячей волн:

$$F_{YK}^{(бер)} = C_{YK}^{(бер)} (k R_0)^2, \quad (4)$$

$$F_{YK}^{(ст)} = C_{YK}^{(ст)} k R_0 \sin(2kd). \quad (5)$$

Здесь  $R_0$  – радиус пузырька в состоянии покоя, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и выше. Коэффициент  $C_{YK}^{(бер)}$  всегда положителен. Это означает, что в бегущей волне пузырьки, подобно твердым частицам, должны удаляться от источника звука. Но заметьте, что произведение  $k R_0$  (которое, напомним, много меньше единицы) входит в формулу (2) в степени 6, в (4) – в степени 2. Это означает, что при прочих равных условиях сила, действующая на пузырек, намного превышает силу, действующую на твердую частицу. Далее, в случае стоячей волны знак коэффициента  $C_{YK}^{(ст)}$  оказывается зависящим не от соотношения плотностей газа и окружающей жидкости, а от соотношения между час-

тотой падающей волны  $\omega$  и резонансной частотой пузырька  $\omega_0$ . В результате этого «мелкие» пузырьки, у которых  $\omega_0 > \omega$  (мелкими их зовут потому, что, чем выше резонансная частота пузырька, тем меньше его радиус), должны собираться в узлах скорости, а «крупные», у которых  $\omega_0 < \omega$ , – в пучностях. Такое поведение хорошо подтверждалось опытными данными, которые уже имелись к моменту выхода статьи Иосиоки и Кавасимы, а также их собственными экспериментами. Любопытно упомянуть, что этот эффект дает один из применяемых на практике способов измерения скорости звука в жидкостях: группируясь в узлах и пучностях стоячей волны, пузырьки позволяют определить местоположение последних и тем самым измерить длину волны, из которой, зная задающую частоту, легко найти скорость звука в тестируемой жидкости.

Иосиока и Кавасима существенно обобщили теорию Кинга, но не преодолели основной ее недостаток. Их вычисления, как и вычисления Кинга, опираются на модель идеальной жидкости, которая игнорирует процессы вязкости и теплопроводности. Во многих ситуациях такая идеализация вполне приемлема, но далеко не во всех. Поэтому предпринимались неоднократные попытки учесть диссипативные эффекты. Однако они были направлены на исследование самых простейших случаев, и их общий недостаток состоял в том, что они учитывали лишь часть процессов, отличающих реальную – вязкую и теплопроводную – среду от идеальной. Подобная ситуация объясняется тем, что корректный переход от идеальной к реальной среде является весьма непростой задачей. Он требует выполнения следующих обязательных шагов. Во-первых, уравнение, описывающее закон сохранения импульса в идеальной жидкости (уравнение Эйлера), нужно заменить на соответствующее уравнение для вязкой жидкости – уравнение Навье – Стокса, которое имеет более высокий порядок. Во-вторых, чтобы учесть процессы теплопроводности, к уравнениям движения жидкости нужно добавить уравнение переноса тепла. В-третьих, необходимо учесть, что в движении вязкой среды в общем случае помимо потенциальной присутствует и вихревая часть, в результате чего скорость среды выражается через два потенциала – скалярный и векторный. В-четвертых, усложняются граничные условия на поверхности дисперсной частицы. В идеальной среде их два – непрерывность нормальных компонент скорости и напряжения. В вязкой теплопроводной среде их шесть – непрерывность нормальных и касательных компонент скорости и напряжения, а также равенство температур и потоков тепла. В-пятых, и это самое сложное, расчет АРС в реальной среде требует решения не только линеаризованных уравнений движения (как это имеет место в идеальной жидкости), но и так называемых уравнений акустического течения, которые представляют собой усредненные по времени уравнения движения реальной жидкости, взятые с точностью до квадратичных членов по амплитуде возмущения. Именно пренебрежение акустическими течениями делало результаты большинства упомянутых выше работ принципиально неверными. Впервые полноценный переход, включающий все перечисленные выше шаги и в то же время сохраняющий общность, присущую «идеальной» теории, был совершен автором настоящей статьи [19–21, 26–31, 34]. Было получено общее аналитическое выражение для первичных

АРС, действующих на сферическую (в состоянии покоя) дисперсную частицу произвольной внутренней структуры и размера, находящуюся в вязкой теплопроводной текучей среде, через которую распространяется произвольная осесимметричная акустическая волна. Это выражение содержит в качестве предельного случая, имеющего место при слабой диссипации, все прежние результаты, полученные для идеальных сред. Оно применимо к дисперсным частицам любого типа (газовым пузырькам, каплям, твердым частицам, сферическим оболочкам, зародышам кристаллизации, биологическим частицам и т. д.) и к наиболее важным акустическим полям, применяемым на практике: плоской бегущей волне, плоской стоячей и квазистоячей волне, расходящейся, сходящейся и стоячей сферической волне, звуковому пучку и т. д. При выводе этого выражения не накладывались ограничения на размер частицы, длину звуковой волны и глубину проникновения вязкой и тепловой волн, вследствие чего оно позволяет корректно вычислять первичные АРС в весьма широком диапазоне значений данных параметров. С помощью указанного общего выражения было проведено обширное теоретическое исследование нелинейной динамики твердых частиц, капель и газовых пузырьков в различных звуковых полях, которое показало, что диссипативные эффекты могут кардинально изменять силовое взаимодействие между дисперсными частицами и акустическим полем. Чтобы проиллюстрировать эти результаты, мы рассмотрим некоторые частные примеры. Прежде всего, предположим, что размер частицы много меньше длины звуковой волны, а затем в рамках этого длинноволнового предела рассмотрим два противоположных случая: случай слабой диссипации и случай сильной диссипации. Эти предположения позволяют существенно упростить чрезвычайно громоздкие общие формулы. Начнем со случая слабой диссипации, где, видимо, должна быть справедливой «идеальная» теория. Но мы сейчас убедимся, что даже в своей «родной» области эта теория может давать сбои.

Диссипацию принято считать слабой, если радиус частицы  $R_0$  намного превосходит глубину проникновения вязкой  $\delta_v$  и тепловой  $\delta_t$  волн в окружающей среде. Как и ранее, в качестве примера возьмем твердую частицу и газовый пузырек в поле плоской стоячей и плоской бегущей волн. Новая, «диссипативная», теория показывает, что в стоячей волне учет эффектов вязкости и теплопроводности (когда они невелики) дает лишь малые поправки к формулам (3) и (5). Однако ситуация принципиальным образом меняется, если мы имеем дело с бегущей волной. В этом случае диссипативная теория дает следующие выражения:

$$F_{\text{тч}}^{(\text{бер})} = (k R_0)^3 \left( A \frac{\delta_v}{R_0} + B \frac{\delta_t}{R_0} \right), \quad (6)$$

$$F_{\text{пуз}}^{(\text{бер})} = k R_0 C \frac{\delta_t}{R_0}, \quad (7)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  всегда положительны. Сравним (6) с формулой Кинга (2). Обе формулы показывают, что сила направлена прочь от излучателя, но

при этом (6) имеет гораздо более низкий порядок по малому параметру  $k R_0$ , чем формула Кинга (2). Причина этого различия заключается в том, что обе формулы представляют собой главные члены в разложении точного выражения для силы по параметру  $k R_0$ , но при выводе формулы (2) изначально предполагалось, что  $\delta_v$  и  $\delta_t$  тождественно равны нулю, что дало главный член, пропорциональный  $(k R_0)^6$ . Тогда как при выводе формулы (6) эти параметры считались хоть и малыми (по отношению к  $R_0$ ), но все же конечными, что дало главный член, пропорциональный  $(k R_0)^3$ , но содержащий малые величины  $\delta_v / R_0$  и  $\delta_t / R_0$ . Другими словами, полное разложение для силы содержит и (2), и (6), а какое из этих выражений доминирует, это определяется соотношением между указанными выше малыми параметрами. Из сравнения формул (2) и (6) следует, что последняя должна доминировать, когда выполняются следующие условия:

$$(k R_0)^3 \ll \delta_v / R_0 \ll 1 \quad \text{или/и} \quad (k R_0)^3 \ll \delta_t / R_0 \ll 1. \quad (8)$$

Анализ конкретных ситуаций показывает, что в подавляющем большинстве случаев, с которыми приходится иметь дело на практике, неравенства (8) хорошо удовлетворяются. Иными словами, в большинстве случаев сила определяется формулой (6), а не формулой Кинга (2), которая является всего лишь малой поправкой к формуле (6). Соответственно сила в бегущей волне должна быть во много раз больше, чем это следует из формулы Кинга. Аналогичный вывод вытекает и из сравнения формул (4) и (7), полученных для газовых пузырьков. Эти примеры показывают, что некоторые звуковые поля очень чувствительны к диссипации и, если мы изначально пренебрегаем ею, результаты могут быть принципиально неверными.

Перейдем к пределу сильной диссипации. Обратите внимание, что в отличие от предыдущего случая этот предел в принципе не может быть корректно исследован в рамках модели идеальной жидкости, даже в случае феноменологического введения диссипации, поскольку таким путем невозможно учесть ряд процессов, отличающих реальную среду от идеальной, например акустические течения. Диссипацию считают сильной, если радиус частицы мал по сравнению с глубиной проникновения вязкой и тепловой волн. Для твердой частицы в этом предельном случае получаем:

$$F_{\text{тч}}^{(\text{бер})} = (k R_0)^3 \left[ A_{\text{тч}} \frac{R_0}{\delta_v} + B_{\text{тч}} \frac{R_0}{\delta_t} \right], \quad (9)$$

$$F_{\text{тч}}^{(\text{ст})} = C_{\text{тч}} (k R_0)^3 \sin(2kd). \quad (10)$$

Рассмотрим вначале формулу (9), которая дает силу в поле бегущей волны. Напомним, что при слабой диссипации эта сила всегда направлена прочь от источника звука. Оказывается, что при сильной диссипации сила может быть направлена и в другую сторону – к излучателю, поскольку выражение в квадратных скобках может менять знак. В результате, например, частицы, плотность которых выше плотности окружающей среды, при сильной диссипации должны

двигаться против звуковой волны. Похожая инверсия происходит и в поле стоячей волны. Перечитаем абзац после формулы (3), чтобы вспомнить, как ведут себя твердые частицы в стоячей волне при слабой диссипации. Формула (10) внешне совпадает с формулой Кинга (3), но обнаруживается, что коэффициент  $C_{тч}$  по-иному зависит от соотношения  $\rho/\rho_0$ , чем коэффициент  $C_K^{(ст)}$ . В результате при сильной диссипации в узлах скорости должны собираться частицы, у которых  $\rho/\rho_0 > 2$ , а не те, у которых  $\rho/\rho_0 < 0,4$ . Этот результат позволяет объяснить эксперимент, который описывается в статье [8]. В указанном эксперименте исследовалось движение частиц железа в поле стоячей ультразвуковой волны в различных жидкостях. При этом наблюдалось, что в глицерине (который, как известно, обладает очень высокой вязкостью) частицы группировались не возле пучностей скорости, как того требует формула Кинга (3), а возле узлов. Анализ этого эксперимента показывает, что он по всем параметрам, включая и требование  $\rho/\rho_0 > 2$ , подпадает под «юрисдикцию» формулы (10), а не (3), поэтому и частицы вели себя соответствующим образом. Мы не будем приводить здесь формулы для газовых пузырьков. Читателю придется просто поверить (а кто не поверит, может обратиться к статьям автора), что и с пузырьками при сильной диссипации происходят такие же любопытные вещи. Не менее (если не более) интересным является и поведение капель, но, повторимся, если кто-то пожелает узнать об этом подробнее, мы отсылаем его к первоисточникам.

Пришло время вернуться к вторичным АРС и рассказать о том, чем нехороша формула Бьеркнесов (1) и что было сделано, чтобы исправить ее недостатки. А нехороша она тем, что допускает только два варианта поведения пузырьков: либо они отталкиваются, и так до бесконечности, либо они притягиваются и в конце концов коагулируют, т. е. сливаются и образуют один большой пузырь. Однако в экспериментах неоднократно наблюдалось иное поведение: пузырьки, резонансные частоты которых были ниже частоты падающей волны (это называется «возбуждение выше резонанса»), сближались, но только до некоторого предела, а затем образовывали устойчивую гроздь, которая не распадалась, пока было включено звуковое поле [9, 10]. Было очевидно, что это происходит потому, что сила меняет знак при изменении расстояния между пузырьками, чего формула (1) не допускает. Неспособность формулы (1) объяснить этот эффект связана с тем, что при ее выводе использовался ряд упрощающих предположений. Среди них есть предположение о том, что расстояние между пузырьками много больше их размеров, что позволяет пренебречь многократным перерасеянием звука между пузырьками и искажением их сферической формы. Первая попытка учесть эти эффекты и тем самым получить выражение для силы, справедливое и при малых разделяющих расстояниях, была сделана Е. А. Заболотской [11]. А завершил эту работу автор настоящей статьи совместно с С. Т. Затраком [22, 24], рассмотрев, кроме того, взаимодействие между пузырьком и каплей [23], а также между пузырьком и твердой частицей [25]. В результате механизм образования пузырьков гроздей стал понятен. Интересно, что для наглядного объяснения этого механизма можно по-прежнему использовать формулу (1), хотя она, как только что было сказано, на самом деле справедлива



лишь при больших разделяющих расстояниях. Оказывается, что при малых расстояниях пузырьки, в качественном смысле, ведут себя так, как если бы при сближении их резонансные частоты увеличивались, а при удалении – уменьшались, стремясь к резонансным частотам одиночных пузырьков. Поэтому, когда оба пузырька возбуждаются выше резонанса, вначале они притягиваются друг к другу. Но при сокращении расстояния между ними их резонансные частоты растут, и может наступить момент, когда частота более мелкого пузырька превысит частоту возбуждения и притяжение сменится отталкиванием, как того требует формула (1). В результате такого процесса и образуется устойчивая пузырьковая гроздь.

Итак, первый недостаток формулы (1) состоит в том, что она не работает при малых разделяющих расстояниях, второй ее недостаток – это то, что она не работает и при больших расстояниях. Потому что при ее выводе предполагалось, что окружающая жидкость является несжимаемой, что допустимо только тогда, когда длина звуковой волны много больше расстояния между пузырьками. Первым этот недостаток попытался преодолеть Б. Е. Немцов [12] – тот самый Борис Немцов, который потом стал губернатором Нижегородской области. Завершать эту работу пришлось автору данного обзора [39, 42]. В итоге удалось разработать метод, который позволяет корректно вычислять вторичные АРС при произвольных разделяющих расстояниях, учитывая при этом и многократное перерассеяние звука, и поверхностные моды пузырьков, и сжимаемость окружающей жидкости. Более того, удалось обобщить этот метод на произвольное число пузырьков и тем самым устранить еще один недостаток теории Бьеркнесов, которая сводит взаимодействие между многими пузырьками к попарным процессам. Удалось, кроме того, применить вышеуказанный метод к расчету вторичных АРС, действующих между каплями, а также между каплями и пузырьками, т. е. обобщить его на любые частицы, движение среды внутри которых может быть описано уравнением Эйлера.

В качестве примера здесь приводится рис. 1, на котором показана сила, действующая между двумя пузырьками, которые возбуждаются выше резонанса, начиная от расстояний, сравнимых с размерами пузырьков (верхняя часть рисунка), и кончая расстояниями, сравнимыми с длиной падающей звуковой волны (нижняя часть рисунка). Пунктирная кривая соответствует формуле (1), а сплошная была получена на основе нового метода. Видно, что теория Бьеркнесов справедлива только для промежуточных расстояний. Она не способна предсказать изменение знака силы при малых расстояниях, которое приводит к образованию пузырьковых гроздей, о чем уже говорилось выше. Она также не работает и при больших расстояниях, где, как показывает рисунок, сила тоже должна менять знак. В результате этого, например, если пузырьки первоначально находятся достаточно далеко друг от друга, вторичные АРС не смогут заставить их сближаться. Это говорит, в частности, о том, что не следует применять высокочастотные поля при дегазации жидкостей и наоборот, можно воспользоваться этим эффектом, если стоит обратная задача – предотвращение коагуляции пузырьков, что требуется в некоторых технологиях.

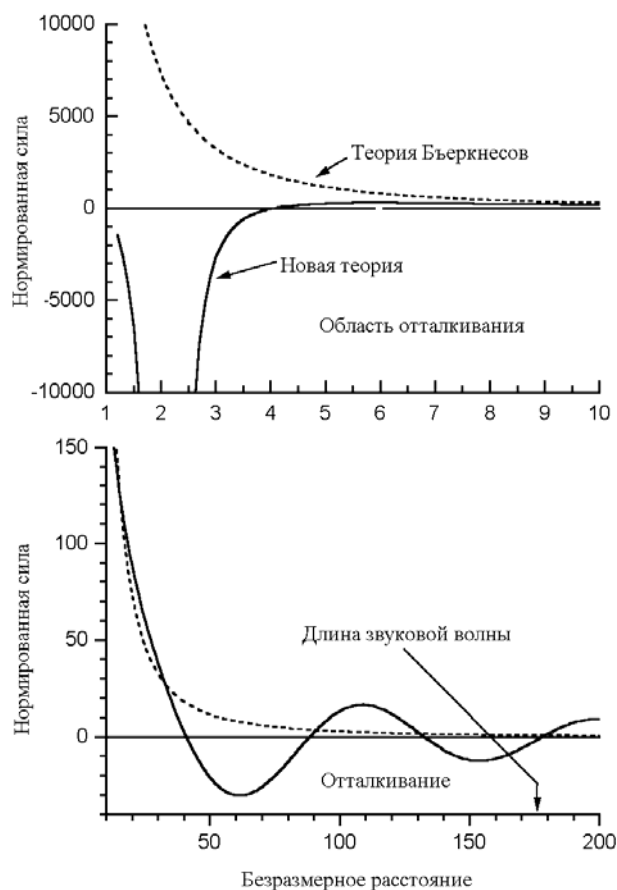


Рис. 1. Сила, действующая между двумя пузырьками

Еще один недостаток формулы Бьеркнесов заключается в том, что она базируется на модели идеальной жидкости. Таким же недостатком обладают и все последующие вычисления, и, к сожалению, его пока не удалось преодолеть. Присутствие второй частицы принципиально меняет геометрию проблемы. «Вторичная» задача в отличие от «первичной» обладает осевой симметрией только в несжимаемой среде. Как только делается попытка учесть сжимаемость окружающей жидкости, у нас появляются (а точнее говоря, проявляются, поскольку в действительности они всегда есть) два выделенных направления – линия центров частиц и волновой вектор, в результате чего задача начинает зависеть от всех трех сферических координат. Поэтому подход, существенно опирающийся на осевую симметрию задачи, который был использован при переходе к реальным средам в теории первичных АРС, не удастся применить в теории вторичных сил. Имеется несколько работ на эту тему, в том числе принадлежащих и автору [32, 37], но полученные в них результаты нельзя считать удовле-

творительными. Таким образом, построение математической теории вторичных АРС для реальных сред, обладающей такой же строгостью и общностью, как и диссипативная теория первичных АРС, пока остается делом будущего.

Этим недостатки теории вторичных АРС не исчерпываются. Проблема, о которой сейчас пойдет речь и рассмотрением которой завершится этот обзор, в равной степени присуща и теории первичных АРС. Поэтому в данном разделе мы будем говорить сразу об обоих типах сил. Эта глобальная проблема заключается в том, что все те результаты, о которых говорилось выше, справедливы лишь для полей умеренной интенсивности, где амплитуда акустического давления мала по сравнению с гидростатическим давлением в окружающей среде АРС, подобно прочим явлениям, относящимся к области нелинейной акустики, представляют собой так называемый слабонелинейный эффект. Это означает, что при его исследовании предполагается, что амплитуда падающего поля хоть и конечна, но достаточно мала для того, чтобы было допустимо применение методов теории возмущений. Таким образом, те формулы для АРС, о которых шла речь выше, на самом деле представляют собой лишь ведущий (квадратичный) член в разложении реальной силы по амплитуде возмущения. Вполне возможно, что с ростом интенсивности падающего поля доминирующим может стать следующий (4-го порядка) член, а с некоторого предела подобное разложение вообще теряет смысл. Интерес к сильным полям, амплитуды которых сравнимы с гидростатическим давлением несущей среды, постоянно растет. По-видимому, уже можно сказать, что это направление стало основным в акустике многофазных сред. Соответственно, возникает насущная потребность в разработке адекватной теории АРС для сильных полей. Тем более, что, как показывают эксперименты, существующая теория явно нарушается в полях высокой интенсивности. Например, она не в состоянии объяснить, почему кавитационные пузырьки в цилиндрическом резонаторе при достижении амплитудой стоячей волны определенного порога начинают двигаться прочь от пучности давления, находящейся в центре резонатора, и в конце концов образуют что-то вроде ореола вокруг этого центра [13]. Существующая теория также не может объяснить, почему возникают кавитационные разряды, о которых говорилось в начале статьи. Согласно всем имеющимся формулам, пузырьки, образующие эти разряды, должны очень быстро сближаться и коагулировать. Вместо этого они выстраиваются в ветвистые структуры, которые кажутся неизменными на протяжении многих акустических циклов [14]. В некоторых случаях такие структуры вдобавок начинают светиться. Свет испускается газом, содержащимся в пузырьках. Это явление получило название многопузырьковой сонолюминесценции, и механизм его тоже пока неясен [15]. В настоящее время сделаны лишь первые попытки, направленные на разработку теории подобных явлений [13, 16–18, 35, 36, 38, 40, 41], и, судя по всему, в ближайшие годы это направление в нелинейной динамике дисперсных частиц будет главным.

### Литература

1. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. М., 1984.
2. Лебедев П. Н. О пондеромоторном действии волн на резонаторы. М., 1899.
3. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука: В 2 т. М., 1955. Т. 1, 2.
4. Bjerknes V. F. K. Fields of Force. New York: Columbia U. P., 1906.

5. *Basset A. B.* A Treatise on Hydrodynamics. London: Cambridge U. P., 1888.
6. *King L.V.* // Proc. of Royal Soc. London Ser. A. 1934. Vol. 147, № 86. P. 212–240.
7. *Yosioka K., Kawasima Y.* // Acustica. 1955. Vol. 5, № 3. P. 167–173.
8. *Аветисян А. Г., Аракелян В. С., Багдасарян О. В., Дудоян А. К.* // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 3. С. 385–386.
9. *Кобелев Ю. А., Островский И. А., Сутин А. М.* // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30, № 7. С. 423–425.
10. *Marston P. L., Trinh E. H., Depew J., Asaki T. J.* // Bubble Dynamics and Interface Phenomena / Ed. by J. R. Blake, J. M. Boulton Stone and N. H. Thomas. Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. P. 343–353.
11. *Заболотская Е. А.* // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 5. С. 618–623.
12. *Немцов Б. Е.* // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9, № 14. С. 858–861.
13. *Akhatov I., Mettin R., Ohl C.D. et al.* // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 3. P. 3747–3750.
14. *Akhatov I., Parlitz U., Lauterborn W.* // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 96, № 6. P. 3627–3635.
15. *Walton A. J., Reynolds G.T.* // Adv. Phys. 1984. Vol. 33. P. 595–660.
16. *Oguz H. N., Prosperetti A.* // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 218. P. 143–162.
17. *Akhatov I., Parlitz U., Lauterborn W.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 5. P. 4990–5003.
18. *Mettin R., Akhatov I., Parlitz U. et al.* // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, № 3. P. 2924–2931.
19. *Doinikov A. A.* // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 267. P. 1–21.
20. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 96, № 5. P. 3100–3105.
21. *Doinikov A. A.* // Proc. of Royal Soc. London Ser. A. 1994. Vol. 447, № 1931. P. 447–466.
22. *Doinikov A. A., Zavtrak S. T.* // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7, № 8. P. 1923–1930.
23. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1996. Vol. 99, № 6. P. 3373–3379.
24. *Doinikov A. A., Zavtrak S. T.* // J. Acoust. Soc. Am. 1996. Vol. 99, № 6. P. 3849–3850.
25. *Doinikov A. A., Zavtrak S. T.* // Ultrasonics. 1996. Vol. 34, № 8. P. 807–815.
26. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1996. Vol. 100, № 2. P. 1231–1233.
27. *Doinikov A. A.* // Wave Motion. 1996. Vol. 24, № 3. P. 275–279.
28. *Doinikov A. A.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 6. P. 6297–6303.
29. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 101, № 2. P. 713–721.
30. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 101, № 2. P. 722–730.
31. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 101, № 2. P. 731–740.
32. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102, № 2. P. 747–751.
33. *Doinikov A. A., Zavtrak S. T.* // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102, № 3. P. 1424–1431.
34. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 103, № 1. P. 143–147.
35. *Doinikov A. A.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59, № 3. P. 3016–3021.
36. *Doinikov A. A.* // Proc. of the 2<sup>nd</sup> Int. Symp. on Two-Phase Flow Modelling and Experimentation. Pisa, Italy, 1999. Vol. 1. P. 601–606.
37. *Doinikov A. A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1999. Vol. 106, № 6. P. 3305–3312.
38. *Pelekasis N. A., Gaki A., Doinikov A. A., Tsamopoulos J. A.* // Proc. of Int. Conf. on Multiphase Systems. Ufa, Russia, 2000. P. 197–203.
39. *Doinikov A. A.* // Proc. of Int. Conf. on Multiphase Systems. Ufa, Russia, 2000. P. 161–166.
40. *Doinikov A. A.* // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 7516–7519.
41. *Doinikov A. A.* // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 2. Paper № 026301 (6 pages).
42. *Doinikov A. A.* // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 444. P. 1–21.

## NONLINEAR DYNAMICS OF DISPERSED PARTICLES IN ACOUSTIC FIELDS

**A. A. Doinikov**

The paper presents an overview of the evolution and the most recent advances of the theory of acoustic radiation forces. These are time-averaged hydrodynamic forces that are exerted

by an acoustic wave field on dispersed particles (gas bubbles, liquid drops, solid particles, etc.) suspended in a fluid (liquid or gas). In the literature, they are often referred to as Bjerknes forces after C. A. Bjerknes and his son V. F. K. Bjerknes, who were among those having first reported on such forces. It is conventional to divide the acoustic radiation forces into two types, namely, the primary forces, which are experienced by single particles, and secondary forces, which are induced between two or more particles. The primary forces make dispersed particles migrate in an acoustic field relative to the sound transducer, while the secondary forces cause them to attract or repel one another. Interest in this phenomenon is motivated by a number of important applications, such as acoustic cavitation, ultrasonic purification of liquid solutions and melts, acoustic coagulation and precipitation of aerosols, acoustic flotation, biomedical ultrasonics, etc.

Beginning in the last century, the effect of acoustic radiation forces was the subject of much theoretical work. The above-mentioned Bjerknes, Rayleigh, King, Yosioka and Kawasima pioneered investigations in this field. The early theory of acoustic radiation forces, both primary and secondary, was based on a large number of simplifying assumptions, which restricted essentially its accuracy and area of applicability and did not allow it to account for many experimental observations, such as stable bubble clusters, known as «bubble grapes», that are formed in a weak acoustic field by gas bubbles driven above resonance; bunching heavy solid particles in high-viscosity liquids subject to a standing ultrasonic wave around the velocity nodes instead of antinodes, and so on. Further investigations, including those by the present author, have fundamentally generalized the original theory of acoustic radiation forces. The theory of primary forces, which was initially based on the model of perfect fluid, was extended to actual, viscous and heat-conducting fluids. This made it possible to understand experimental findings that appeared abnormal within the framework of the former theory, as well as to predict many new interesting phenomena. In particular, an analytical expression for the primary radiation force exerted by an arbitrary axisymmetric acoustic field on a spherical (at rest) dispersed particle of arbitrary internal structure and arbitrary size (relative to the wavelength of sound) in a viscous heat-conducting fluid has been derived. This general expression was then used in investigating nonlinear dynamics of various specific particles (gas bubbles, liquid drops, solid particles) in various sound fields. As a result, a revised formula for the primary radiation force in a plane traveling wave under conditions of low dissipation was obtained. The limit of high dissipation, inaccessible for the former theory, was also examined. This study revealed that in some cases high dissipation could reverse the direction of particle motion as compared with the limit of low dissipation.

The theory of secondary radiation forces has also been improved substantially, even though to a lesser extent than that of primary forces. In particular, an analytical expression has been derived for the secondary forces induced by an acoustic wave field between  $N$  particles freely suspended in a fluid. The media outside and inside the particles were assumed to be ideal compressible fluids. Multiple re-scattering of sound between the particles and shape modes of all orders were taken into account. No restrictions were imposed on the size of the particles, the separation distances between them, and their number. The new theory first made it possible to follow continuously the evolution of the radiation interaction force from large to small separation distances and showed that in the general case, the secondary force behaves in far more complicated way than that is predicted by the classical Bjerknes theory. The main limitation of the new theory is that it, unlike the theory of primary forces, is still based on the model of perfect fluid.

In the paper, it is also pointed out that at present the mainstream of nonlinear bubble dynamics is investigation of strong acoustic fields, with pressure amplitudes on the order of the hydrostatic pressure in the surrounding fluid. This requires the corresponding further development of the theory of acoustic radiation forces since the existing theory is only valid for moderate acoustic fields, with pressure amplitudes much smaller than the hydrostatic pressure in the surrounding fluid. Therefore it cannot explain effects that occur in strong fields, such as «dancing» motion of gas bubbles in plane standing waves, cavitation streamer formation, etc.