

# ОДНОМЕРНАЯ И ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛИ СПИРАЛЬНОГО МАГНИТОКУМУЛЯТИВНОГО ГЕНЕРАТОРА: ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

С. Н. Сытова, В. В. Тихомиров, С. Л. Черкас

## 1. Введение

Магнитокумулятивный генератор, использующий химическую энергию взрывчатого вещества для движения проводящей оболочки в магнитном поле и сжатия магнитного потока, остается единственным компактным одноразовым источником, способным генерировать большие токи [1]. История исследования различных типов МКГ насчитывает свыше пятидесяти лет. Область применения МКГ довольно обширна: геофизика, испытание молниезащитного оборудования, источники питания для генераторов широкополосного излучения и т. д.

Для успешного конструирования МКГ с заданными параметрами требуется предварительное компьютерное моделирование. В работе [2] приведены простые формулы для индуктивности и сопротивления многокаскадного МКГ, позволяющие создавать так называемые «одномерные» компьютерные коды [3]. Следует также отметить и «нуль-мерный» код [4], который является очень быстрым благодаря использованию аппроксимации для индуктивности соленоида конечной длины [5] и предположения о пространственной однородности плотности магнитной энергии внутри МКГ. Несомненным преимуществом таких программ является их простота, достигаемая за счет использования приближений, которые хотя и не позволяют учесть детальное распределение токов по лайнеру, однако дают возможность с достаточной точностью рассчитывать величины токов и напряжений в системе МКГ – нагрузка.

Более сложные «двумерные» [6, 7] и «трехмерные» [8, 9] физико-математические модели МКГ и компьютерные программы, их реализующие, позволяют учесть динамику движения лайнера и нелинейную диффузию магнитного поля, произвести точный подсчет индуктивности МКГ, запаздывания времени установления точки контакта и др. Такого рода алгоритмы требуют гораздо большего компьютерного времени и необходимы для финального моделирования системы. Для предварительного выбора параметров системы удобно пользоваться простыми программами.

Целью данной работы является сравнение одномерной и двумерной моделей, реализованных в виде компьютерных программ, с экспериментальными данными, полученными в НИИ ЯП БГУ для многосекционного МКГ.

## 2. Одномерная модель МКГ

МКГ состоит из блока накачки, лайнера, соленоида и нагрузки. Как известно [1], такой генератор может быть описан на основе электротехнического уравнения относительно тока  $I(t)$  с меняющимися во времени индуктивностью  $L(t)$  и сопротивлением  $R(t)$  МКГ:

$$\frac{dI(t)}{dt}(L(t) + L_n) + I(t)\left(\frac{dL(t)}{dt} + R(t) + R_n\right) = 0, \quad (1)$$

где  $L_n$ ,  $R_n$  – индуктивность и сопротивление нагрузки.

Схема МКГ длиной  $l_s$  радиусами обмотки  $\rho$  и арматуры  $r$  изображена на рис. 1. Можно выделить 3 области: область (1) перед расширяющимся лайнером, «конус» (2) расширяющегося лайнера и область (3) с витками, замкнутыми лайнером. С течением времени конус лайнера смещается вправо со скоростью, равной скорости детонационной волны. В каждый момент времени форма медного лайнера МКГ задается функцией  $r(x, t)$ .

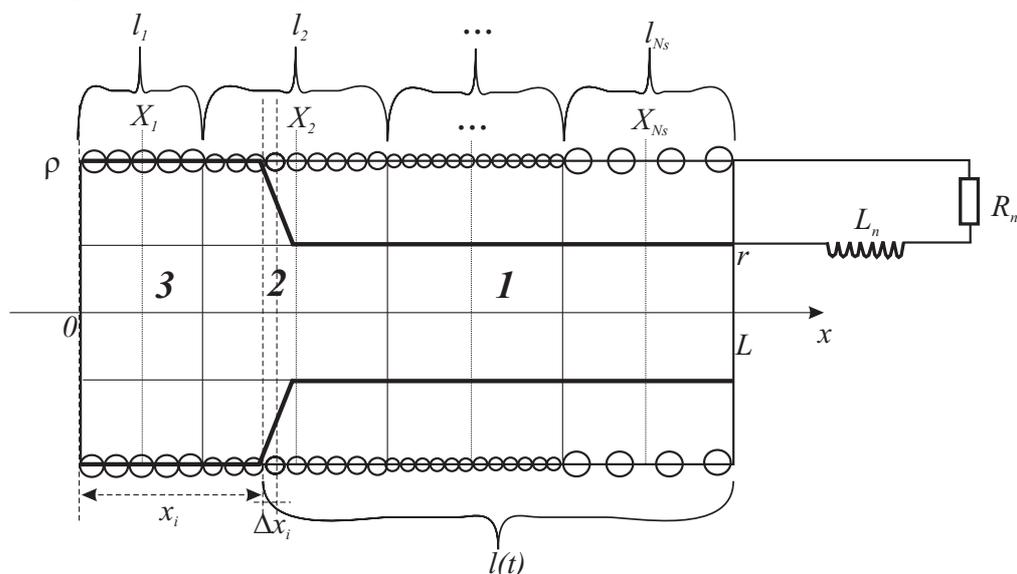


Рис. 1. МКГ с неравномерной намоткой

Для описания зависящих от времени индуктивности и сопротивления воспользуемся следующей простой моделью [2]. Поскольку время протекания процессов в МКГ составляет микросекунды, то магнитное поле не успевает проникнуть в область, ограниченную лайнером, поэтому в первом приближении эта область может считаться сверхпроводящей. Для расчета индуктивности рассмотрим соленоид со сверхпроводящей сердцевинной радиуса  $r$ . Плотность тока, протекающего по поверхности соленоида, может быть разложена на составляющую  $j_{\parallel}$ , параллельную оси соленоида, и перпендикулярную ей циркулярную составляющую  $j_{\perp}$  (рис.2).

Если мысленно разрезать соленоид и развернуть поверхность (рис. 2), то получится, что эти составляющие связаны соотношением  $j_{\perp} = j_{\parallel} \operatorname{tg} \theta = j_{\parallel} \frac{2\pi\rho}{h}$ , где  $h$  – шаг намотки соленоида.

Записав энергию магнитного поля как сумму энергий параллельного и цир-

кулярного токов, а затем, разделив результат на  $I_{\parallel}^2/2$ , где полный параллельный ток равен  $I_{\parallel} = j_{\parallel} 2\pi\rho\delta$  и  $\delta$  – толщина скин-слоя, найдем индуктивность, приходящуюся на единицу длины соленоида [2]:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\mu_0\pi\rho}{h^2(x)}(\rho^2 - r^2(x,t)) + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\rho}{r(x,t)}, \quad (2)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7$  Гн/м. В выражении (2) учитывается неравномерность намотки соленоида с шагом  $h(x)$ , а также зависимость радиуса лайнера от координаты  $x$  и времени  $t$ . Множителем  $(\rho^2 - r^2)/\rho^2$  учитывается тот факт, что магнитное поле не успевает проникнуть в область, занятую лайнером, и, таким образом, эта область не дает вклада в энергию системы. Интегрирование по  $x$  дает индуктивность МКГ при определенном положении лайнера в данный момент времени.

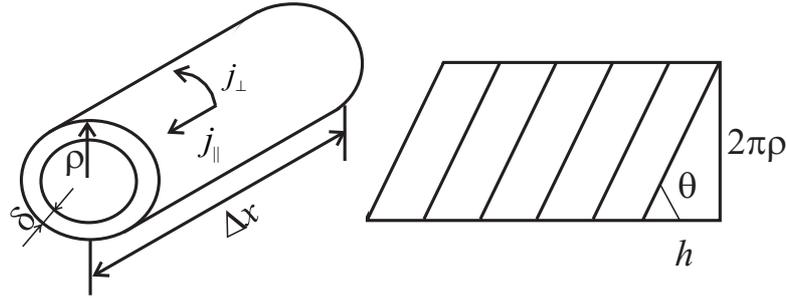


Рис. 2. Токовая поверхность МКГ и ее развертка

Вывод формулы для сопротивления МКГ заключается в расчете диссипируемой в объеме проводника  $\Delta V$  энергии  $\Delta W = \eta j^2 \Delta V$ , которая складывается из энергий  $\Delta W_{\parallel}$ ,  $\Delta W_{\perp}$ , соответствующих параллельному и циркулярному токам. Сопротивление МКГ равно отношению полной диссипируемой в единицу времени энергии к квадрату параллельного тока  $\Delta R = \Delta W / I_{\parallel}^2$ . С учетом того, что ток протекает в тонком скин-слое толщиной  $\delta$ , находим:

$$\frac{\Delta W_{\perp}}{I_{\parallel}^2} = \frac{j_{\perp}^2 \eta 2\pi\rho\delta\Delta x}{(j_{\parallel} 2\pi\rho\delta)^2} = \frac{j_{\perp}^2}{j_{\parallel}^2} \frac{\eta\Delta x}{2\pi\rho\delta} = \frac{2\pi\rho\eta}{h^2\delta} \Delta x,$$

$$\frac{\Delta W_{\parallel}}{I_{\parallel}^2} = \frac{j_{\parallel}^2 \eta 2\pi\rho\delta\Delta x}{(j_{\parallel} 2\pi\rho\delta)^2} = \frac{\eta}{2\pi\rho\delta} \Delta x,$$

где  $\eta$  – удельное сопротивление материала обмотки и лайнера. Суммируя диссипируемые энергии (в единицу времени), выделяющиеся как на катушке, так и на лайнере, приходим к конечной формуле [2]:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{2\pi\eta}{h^2(x)\delta} \left( \frac{\rho}{K} + r(x,t) \right) + \frac{\eta}{2\pi\delta} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{r(x,t)} \right), \quad (3)$$

где введен коэффициент заполнения  $K$ , равный отношению диаметра металлической жилы провода к полному диаметру провода. Этим коэффициентом учитывается то, что ток течет только по металлу и, таким образом, реальное сечение, по которому течет ток, в  $K$  раз меньше.

Скин-слой существенно влияет на сопротивление МКГ. Его изменение в зависимости от производной тока ВМГ можно приближенно представить следующим образом:

$$\frac{\eta}{\delta} \rightarrow k \sqrt{\frac{dI(t)/dt}{I(t)}} + \frac{\eta}{d}, \quad (4)$$

где феноменологический коэффициент  $k$  равен примерно  $k = 1.47 \times 10^{-7}$  и может уточняться по результатам экспериментальных исследований,  $d$  – диаметр провода. Формула (4) означает, что в (3) величина  $\eta/\delta$  в каждый момент времени заменяется выражением правой части (4).

### 3. Двумерная модель МКГ

Изложим теперь основы двумерной модели. Следует заметить, что в катушке МКГ параллельный и перпендикулярный оси токи жестко связаны через шаг намотки. В то же время на лайнере и других деталях МКГ (например, фланцах) могут возбуждаться круговые токи, что в конечном итоге препятствует проникновению магнитного поля в область, ограниченную лайнером и данными деталями МКГ. Базовой формулой для двумерного моделирования является взаимоиндуктивность  $\mathbf{M}(\rho, a, r, b, s)$  двух колец радиусами  $\rho$ ,  $r$  и ширинами  $a$ ,  $b$ , находящихся на расстоянии  $s$ . Формулы для данной величины могут быть выведены интегрированием или взяты из справочника [10].

Обозначим параллельную оси МКГ компоненту тока  $I_z$ . Как уже говорилось выше, плотность циркулярного тока в катушке жестко связана с током  $I_z$  через шаг намотки. Лайнер можно разбить на витки толщиной  $\Delta x_i$ , причем радиус каждого витка меняется со временем, что соответствует расширению витка, когда до него доходит детонационная волна. В витках возбуждаются токи  $I_i^\theta$  за счет взаимоиндукции с соленоидом обмотки.

На рисунке 1 введены следующие обозначения:  $l(t)$  – длина неотработавшего лайнера,  $l_k$  – длина  $k$ -й секции;  $X_k$  – центр  $k$ -й секции,  $k = 1, \dots, N_s$ ;  $N_s$  – число секций ВМГ;  $x_i$  – координата центра  $i$ -го контура-витка;  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  – шаг  $i$ -го контура-витка,  $i = 1, \dots, N$ , где  $N$  – число контуров-витков, на которое разбивается лайнер;  $j_s$  – номер самой левой секции, внутри которой находится конус лайнера. Перед началом работы  $j_s = 1$ .

Система уравнений для многосекционного ВМГ выглядит следующим образом:

$$(L_z + L_n) \frac{dI_z}{dt} + \sum_{i=1}^N \left( M_{zi} \frac{dI_i^\theta}{dt} + I_i^\theta \frac{d\tilde{M}_{zi}}{dt} \right) + \left( R_z + R_n + \frac{dL_z}{dt} \right) I_z = 0, \quad (5)$$

$$\left( M_{zi} \frac{dI_z}{dt} + I_z \frac{d\tilde{M}_{zi}}{dt} \right) + \sum_{j=1}^N \left( M_{ij}^\theta \frac{dI_j^\theta}{dt} + I_j^\theta \frac{d\tilde{M}_{ij}^\theta}{dt} \right) + R_i^\theta I_i^\theta = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (6)$$

$$L_z(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{r_i < R} \ln\left(\frac{\rho}{r_i}\right) \Delta x_i + \sum_{k=j_s}^{N_s} \sum_{n=j_s}^{N_s} \frac{l_k l_n}{h_k h_n} \mathbf{M}(\rho, l_n, \rho, l_k, X_n - X_k), \quad (7)$$

представляет собой индуктивность соленоида многосекционного МКГ (без лайнера).

Взаимоиндуктивность соленоида с  $i$ -м витком лайнера вычисляется следующим образом:

$$M_{zi} = \sum_{k=j_s}^{N_s} \frac{l_k}{h_k} \mathbf{M}(\rho, l_k, r_i, \Delta x_i, X_k - x_i).$$

Следует отметить, что длины катушек  $l_k$  постоянны во времени за исключением катушки  $l_{j_s}(t)$ , которая в данный момент «проходится» лайнером.

$M_{ij}^\theta = \mathbf{M}(r_i(t), \Delta x_i, r_j(t), \Delta x_j, x_i - x_j)$  – взаимоиנדуктивности витков лайнера. Тильда в  $\tilde{M}_{zi}$  и  $\tilde{M}_{ij}^\theta$  означает, что при их расчете нужно считать, что лайнер доходит только до внутренней изоляции провода обмотки, а не до металлической жилы.

Сопротивление вычисляется из тех же принципов, что и в одномерной модели:

$$R_z = \sum_{i=1}^N \frac{\eta \Delta x_i}{2\pi r_i \delta} + \sum_{m=j_s}^{N_s} l_m \left( \frac{2\pi \eta \rho}{\delta K_m} \frac{1}{h_m^2} + \frac{\eta}{2\pi \rho \delta} \right), \quad (8)$$

$$R_i^\theta = \frac{2\pi \eta}{\delta} \frac{r_i(t)}{\Delta x_i},$$

где  $\delta$  – толщина скин-слоя,  $K_m$  – коэффициент заполнения  $m$ -й секции. Скин-слой моделируется с помощью подхода (4).

Возникает вопрос о постановке начальных условий для  $\theta$ -токов МКГ в системе (5) – (6). Если накачка достаточно медленная, то можно представить, что в некоторый момент времени МКГ подсоединен к источнику постоянного напряжения и в нем устанавливается стационарный ток. При этом в начальный момент времени в лайнере возникают токи, препятствующие проникновению магнитного поля в лайнер, однако далее они затухают, так что на момент запуска МКГ ток будет существовать только в обмотке, а  $\theta$ -токи считаются равными нулю:  $I_i^\theta(0) = 0$ . Если используется быстрая накачка, то токи в лайнере не успевают затухнуть, т. е. магнитное поле не будет проникать в лайнер уже на стадии накачки. В этом случае необходимо моделировать накачку и работу МКГ как единый процесс.

#### 4. Приближенное вычисление эффективной индуктивности

Представляется полезным вывести формулу для точного расчета индуктивности МКГ  $L_{zef}(t)$  в случае сверхпроводящего лайнера. Эта индуктивность должна всегда быть меньше  $L_z(t)$  в (7) и может быть измерена до начала работы МКГ с помощью генератора высокой частоты (разумеется, измерения должны проводиться со вставленным внутрь МКГ лайнером).

Положим  $R_i^\theta = 0$ . Тогда из (5) – (6) получается следующая система уравнений в векторном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L_z I_z) + \frac{d}{dt}(\vec{M}_z \vec{I}^\theta) + R_z I_z &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\vec{M}_z I_z) + \frac{d}{dt}(\mathbf{M}^\theta \vec{I}^\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mathbf{M}^\theta = (M_{ij}^\theta)$  – матрица коэффициентов  $M_{ij}^\theta$ ,  $\vec{M}_z = (M_{zi})$  – вектор коэффициентов  $M_{zi}$ ,  $\vec{I}^\theta = (I_i^\theta)$  – вектор токов  $I_i^\theta$ .

Проинтегрируем второе уравнение:

$$\vec{M}_z I_z + \mathbf{M}^\theta \vec{I}^\theta = \vec{M}_z(0) I_z(0).$$

Из него следует

$$\vec{I}^\theta = (\mathbf{M}^\theta)^{-1} (-\vec{M}_z I_z + \vec{M}_z(0) I_z(0)), \quad (10)$$

где  $(\mathbf{M}^\theta)^{-1}$  – обратная матрица. Подставляя (10) в (9), получим:

$$\frac{d}{dt}(L_z I_z) + \frac{d}{dt} \left( -\vec{M}_z (\mathbf{M}^\theta)^{-1} \vec{M}_z I_z + \vec{M}_z (\mathbf{M}^\theta)^{-1} \vec{M}_z I_z(0) \right) + R_z I_z = 0. \quad (11)$$

В процессе работы  $I_z(t)$  становится много больше  $I_z(0)$ . Таким образом, вторым слагаемым в скобках можно пренебречь. Тогда уравнение (11) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(L_{zeff} I_z) + R_z I_z = 0, \quad (12)$$

$$L_{zeff} = L_z(t) - \vec{M}_z(t) (\mathbf{M}^\theta(t))^{-1} \vec{M}_z(t). \quad (13)$$

Полученное выражение (13) для  $L_{zeff}$  можно использовать для проверки экспериментально измеренных индуктивностей, а также для введения поправочного коэффициента в программу по одномерному моделированию ВМГ. Это связано с тем, что приближенная формула (2) дает завышенное значение индуктивности.

## 5. Компьютерные программы моделирования МКГ

Для численного моделирования МКГ по моделям (1) – (4) и (5) – (8) были предложены разностные методы, на основе которых созданы компьютерные программы, написанные на языке Фортран. Интерфейс одной из программ приводится на рис. 3. Время работы этой программы составляет порядка минуты для расчетной сетки в 20 000 точек. Время работы двумерной программы моделирования МКГ по формулам (5) – (8) и (13) составляет несколько десятков минут.

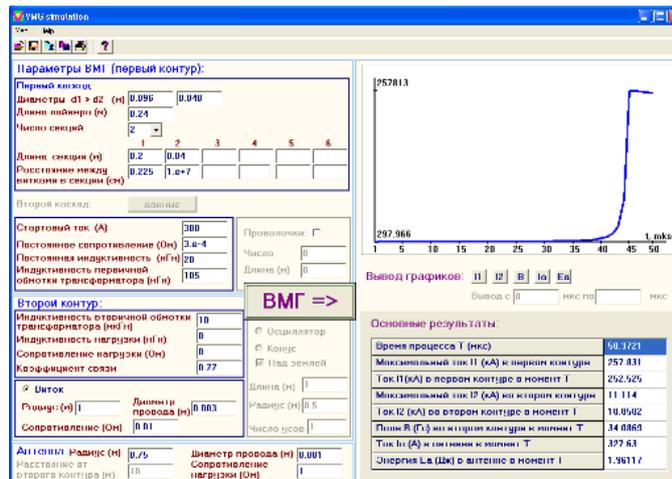


Рис. 3. Интерфейс программы VMG-1

## 6. Сравнение с экспериментом

МКГ, разработанный в НИИ ЯП, представлял собой пятисекционный МКГ с очень плавным выводом индуктивности в конце работы. В результате высота пиков напряжения между лайнером и обмоткой была примерно одна и та же в процессе всей работы генератора (рис. 4). Данный МКГ предназначен для получения большого тока без каких-либо требований на ширину выходного импульса. Рассчитанная начальная индуктивность со вставленным внутрь лайнером  $L_{z\text{eff}}$  составила 265 мкГн, в то время как измеренная экспериментально была 263 мкГн. По одномерной модели расчет начальной индуктивности давал 309 мкГн, поэтому в одномерных расчетах использовался поправочный коэффициент для индуктивности 0.85.

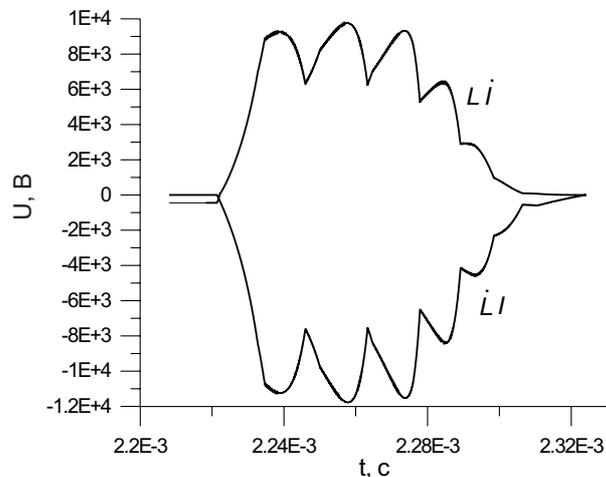


Рис. 4. Напряжение МКГ

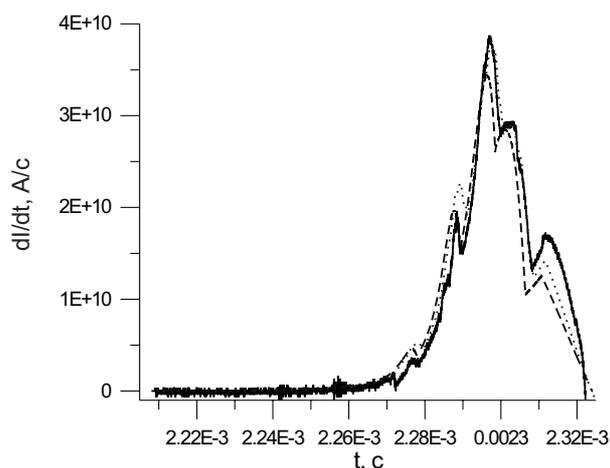


Рис. 5. Производная тока МКГ ( ——— эксперимент, ----- одномерная модель, ..... двумерная модель)

На рисунке 5 приведена экспериментальная кривая производной тока МКГ в сравнении с численными результатами, полученными по одномерной и двумерной моделям, описанным выше. Наиболее детальной экспериментальной информацией является зависимость производной тока от времени. Площадь под кривой численно равна максимальному току 0.9 МА, достигнутому в данном эксперименте. Расчет по одномерной и двумерной моделям проводились при одном и том же коэффициенте потерь и прочих входных параметрах. Уменьшая коэффициент потерь, можно добиться несколько лучшего совпадения с экспериментом и для одномерной модели. Преимущество двумерной модели состоит в том, что в ней не требуется вводить поправочный коэффициент в индуктивность. Кроме того, она в принципе позволяет точно учесть влияние фланцев и цилиндрических секций в передней и задней части обмотки, а также других деталей МКГ, в которых могут возбуждаться циркулярные токи. В расчетах данные элементы конструкции, так же как и лайнер, разбивались на витки, связанные взаимными индукциями между собой и с секциями обмотки и витками лайнера.

## 6. Заключение

Таким образом, одномерное моделирование дает приемлемую точность для предварительного проектирования МКГ. При этом необходимо вводить поправочный коэффициент для индуктивности, рассчитанной по одномерной модели, путем ее сравнения с  $L_{z\text{eff}}$  из двумерной модели. Заметим, что феноменологический коэффициент при сопротивлении, учитывающий дополнительные потери магнитного потока, позволяет добиться удовлетворительного совпадения формы кривой для производной тока МКГ с экспериментальной как для двумерной, так и одномерной моделей.

Авторы статьи благодарят экспериментальную группу НИИ ЯП БГУ под руководством В. Г. Барышевского за предоставленные экспериментальные данные.

## Литература

1. *Фортвов Е.В.* Взрывные генераторы мощных импульсов электрического тока. 2002.
2. *Павловский А.И., Людаев Р. З.* и др. // Труды III Междунар. конф. «Сверхсильные магнитные поля». 1984. С. 312.
3. *Pavlovsky A. I., Ludaev R. Z.* et al. //Megagauss Fields and Pulsed Power Systems. 1990. P. 233.
4. *Novac B. M., Smith I. R.* // Electromagnetic Phenomena. 2003. Vol. 3, № 4. P. 445.
5. *Wheeler H. A.* // Proc. Inst. Radio Eng. 1928. Vol. 16. P.1398.
6. *McGlaun J. M., Thomson S. L., Freeman J. R.* // Megagauss Physics and Technology. 1980. P. 193.
7. *Пикарь А.С., Дерюгин Ю.Н.* и др. //Труды VI Забабахинских научных чтений. 2001. С. 1.
8. *Salon S., Wendling P.* // Megagauss Fields and Pulsed Power Systems. 1990. P. 189.
9. *White D. A., Rieben R. N., Wallin B. K.* // Megagauss 2006 IEEE Int. Conf. 2006. P.371
10. *Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А.* Расчет индуктивностей: Справочная книга. 1986. 488 с.

### ONE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL MODELS OF THE HELICAL FLUX COMPRESSION GENERATOR: NUMERICAL ANALYSIS AND COMPARISON WITH EXPERIMENT

**S. N. Sytova, V. V. Tikhomirov, S. L. Cherkas**

Comparison of one-dimensional and two-dimensional models of the helical flux compression generator with experimental results demonstrates that both models allow to obtain good agreement with experiments. In the frame of two-dimensional model a method of exact calculation of generator inductance with liner inside was proposed. Software packages implementing both models allow to calculate all parameters of the helical flux compression generator with variable winding steps.